CORRIGÉS DETAILLÉS ET REDIGÉS PAR THEMES

(Explications signalées en couleur ou par des «nuages verts» !)

- **PARTIE A**: Second degré (Exercice A1 à A7)
- **PARTIE B**: Suites (Exercice B1 à B11)
- **PARTIE C**: Fonctions . . . (Exercice C1 à C20)
- **PARTIE D**: Probabilités et variables aléatoires. (Exercice D1 à D9)

Exercice A1.

a) $5(2x-3)=(x-1)(2x-3) \Leftrightarrow 5(2x-3)-(x-1)(2x-3)=0$ Facteur commun

$\Leftrightarrow (2x-3)(5-(x-1))=0$

$\Leftrightarrow (2x-3)(-x+6)=0$

$\Leftrightarrow 2x-3=0$ OU $-x+6=0$

$x=\frac{3}{2}$ $\quad x=6$

$\boxed{S=\left\{\frac{3}{2};6\right\}}$

(ou se ramener à une équation du 2nd degré si au départ on développe au lieu de factoriser)

c) $x^2-8x+15=0$

On a: $\Delta=(-8)^2-4\times1\times15=64-60=4>0$

Il y a deux solutions:

$x_1=\frac{-(-8)-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{8-2}{2}=3$

$x_2=\frac{-(-8)+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{8+2}{2}=5$ Donc $\boxed{S=\{3;5\}}$

d) $x^3-x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x^2-x-6)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-x-6=0$

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-6)$

$\Delta=25>0$

Il y a deux solutions

$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{1-5}{2}=-2$

$x_2=\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1}=\frac{1+5}{2}=3$

Donc $\boxed{S=\{-2;0;3\}}$.

g) $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2 \Leftrightarrow \frac{9\times3}{x\times3}-\frac{x\times x}{3\times x}-\frac{2\times3x}{1\times3x}=0$

$\Leftrightarrow \frac{27-x^2-6x}{3x}=0$

$\Leftrightarrow \frac{-x^2-6x+27}{3x}=0$

$\Leftrightarrow 3x\neq0$ et $-x^2-6x+27=0$.

$x\neq0$ $\quad \Delta=(-6)^2-4\times(-1)\times27$

$\Delta=36+108=144>0$

Il y a deux solutions

$x_1=\frac{-(-6)-\sqrt{144}}{2\times(-1)}=\frac{6-12}{-2}=3$

$x_2=\frac{-(-6)+\sqrt{144}}{2\times(-1)}=\frac{6+12}{-2}=-9$

Donc $\boxed{S=\{-9;3\}}$.

b) $x^3=9x \Leftrightarrow x^3-9x=0$

$\Leftrightarrow x(x^2-9)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-9=0$

$x^2=9$

$x=-\sqrt{9}=-3$ ou $x=\sqrt{9}=3$

$\boxed{S=\{-3;0;3\}}$

e) $(5x^2+x+4)(x^2+10x+25)=0$

$5x^2+x+4=0$ ou $x^2+10x+25=0$

$\Delta=1^2-4\times5\times4$ $\quad (x+5)^2=0$ ↪ calcul de Δ: $\Delta=\ldots=0$!

$\Delta=-79<0$ $\quad x+5=0$

Il n'y a pas de solutions $\quad x=-5$

$\boxed{\text{Donc } S=\{-5\}}$

f) $\frac{x(3x-1)-x(2x+3)}{16-x^2}=0$ (E) Equation quotient NUL $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow \underbrace{B\neq0 \text{ et } A=0}_{\text{Ensemble de résolution}}$

(E) $\Leftrightarrow$ $16-x^2\neq0$ et $x(3x-1)-x(2x+3)=0$

$x^2\neq16$ $\quad x[(3x-1)-(2x+3)]=0$

$x\neq-4$ et $x\neq4$ $\quad x(x-4)=0$

$x=0$ ou $x=4$ (ne convient pas)

Donc $\boxed{S=\{0\}}$

Autre façon de rédiger:

(E) $\frac{x(3x-1)-x(2x+3)}{16-x^2}=0$

* (E) a un sens si: $16-x^2\neq0 \Leftrightarrow x^2\neq16$

$\Leftrightarrow x\neq-4$ et $x\neq4$.

* Pour $x\neq-4$ et $x\neq4$: { $B\neq0$

(E) $\Leftrightarrow x(3x-1)-x(2x+3)=0$.

$\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$ $\quad x[(3x-1)-(2x+3)]=0$

$x(x-4)=0$

$x=0$ ou $x-4=0$

$x=4$ impossible.

Donc $\boxed{S=\{0\}}$.

h) $x + \frac{1}{x-3} = 5 \Leftrightarrow \frac{x}{1} + \frac{1}{x-3} - \frac{5}{1} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-3) + 1 - 5(x-3)}{x-3} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 1 - 5x + 15}{x-3} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 8x + 16}{x-3} = 0$

$\Leftrightarrow x - 3 \neq 0$ et $x^2 - 8x + 16 = 0$

$x \neq 3$ $\quad (x-4)^2 = 0$ → calcul $\Delta = ...0!$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

Donc $\boxed{S = \{4\}}$

j) $\frac{3x^2 + 5x + 8}{6 - 2x} > 0$

* L'inéquation a un sens si $6 - 2x \neq 0$
  $x \neq 3$

* Racines de $3x^2 + 5x + 8$
  $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 8 = -71 < 0$
  Il n'y a pas de racines.

* Tableau de signes:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$3x^2+5x+8$	+	‖	+
⚠ $6-2x$	+	‖	−
$\frac{3x^2+5x+8}{6-2x}$	+	‖	−

$\boxed{S =]-\infty; 3[}$

Exercice A2.

Soit x le 1er nombre

Le suivant est $x+1$.

On cherche x tel que $x(x+1) = 4970$

$x^2 + x - 4970 = 0$

on a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-4970)$

$\Delta = 19881 > 0$

Il y a deux racines:

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{19881}}{2 \times 1} = \frac{-1 - 141}{2} = -71$

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{19881}}{2 \times 1} = \frac{-1 + 141}{2} = 70$

i) $(x^2 - 5x - 6)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3) < 0$

* Racines de $x^2 - 5x - 6$
  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 49 > 0$
  Il y a deux racines.
  $x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{5-7}{2} = -1$
  $x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{5+7}{2} = 6$

* Racines de $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$
  $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 3$
  $\Delta = 4 \times 3 - 12 = 0$
  Il y a une racine
  $x_0 = \frac{-(2\sqrt{3})}{2 \times 1} = -\sqrt{3}$

* Tableau de signes

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		6		$+\infty$
x^2-5x-6		+		+	0	−	0	+	
$x^2-2\sqrt{3}x+3$		+	0	+		+		+	
$(x^2-5x-6)(x^2...+3)$		+	0	+	0	−	0	+	

$\boxed{S =]-1; 6[}$

k) $\frac{2-x}{x+1} \geqslant \frac{x+1}{2-x} \Leftrightarrow \frac{2-x}{x+1} - \frac{(x+1)}{2-x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{(2-x)(2-x) - (x+1)(x+1)}{(x+1)(2-x)} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{(2-x)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(2-x)} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{(4 - 4x + x^2) - (x^2 + 2x + 1)}{(x+1)(2-x)} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{-6x + 3}{(x+1)(2-x)} \geqslant 0$

* L'inéquation a un sens si $x+1 \neq 0$ et $2 - x \neq 0$
  $x \neq -1$ $\quad x = 2$
* Racine de $-6x+3$: $-6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
* Tableau de signes:

x	$-\infty$		-1		$1/2$		2		$+\infty$
$-6x+3$		+	‖	+	0	−	‖	−	
$-x^2...!$ $(x+1)(2-x)$		−	‖	+		+	‖	−	
$\frac{-6x+3}{(x+1)(2-x)}$		−	‖	+	0	−	‖	+	

$S =]-1; \frac{1}{2}] \cup]2; +\infty[$.

Conclusion:

Il y a deux possibilités:

* -71 et $-71 + 1 = -70$
* 70 et $70 + 1 = 71$.

Exercice A3.

a) $f(x)=\frac{4}{(x+1)^2}-9$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

* f est définie si $(x+1)^2\neq 0$
$x+1\neq 0$
$x\neq -1$ Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

* Signe de $f(x)$:

$f(x)=\frac{4}{(x+1)^2}-9=\frac{4-9(x+1)^2}{(x+1)^2}$

$f(x)=\frac{4-9(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}$

$f(x)=\frac{-9x^2-18x-5}{(x+1)^2}$ $x\neq -1$.

• racines de $-9x^2-18x-5$

$\Delta=(-18)^2-4\times(-9)\times(-5)=324-180=144>0$

Il y a deux racines:

$x_1=\frac{-(-18)-\sqrt{144}}{2\times(-9)}=\frac{18-12}{-18}=\frac{6}{-18}=-\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{-(-18)+\sqrt{144}}{2\times(-9)}=\frac{18+12}{-18}=\frac{5\times6}{-3\times6}=-\frac{5}{3}$

• Tableau de signes:

x	$-\infty$		$-5/3$		-1		$-1/3$		$+\infty$
$-9x^2-18x-5$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

* Le(s) point(s) d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses a (ont) pour coordonnées $(x;0)$ avec $f(x)=0$ ← résoudre l'équation

or $f(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$ ou $x=-\frac{1}{3}$

Ainsi $A(-\frac{5}{3};0)$ et $B(-\frac{1}{3};0)$ sont les points cherchés.

* Le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe ~~des~~ des ordonnées a pour coordonnées:
$(0;f(0))$ avec $f(0)=\frac{4}{(0+1)^2}-9=-5$.
soit $(0;-5)$.

b) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}-\frac{x-2}{x-1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$.

* f est définie si $x+2\neq 0$ et $x-1\neq 0$
$x\neq -2$ $x=1$

Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$.

* Signe de $f(x)$: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$f(x)=\frac{x+1}{x+2}-\frac{(x-2)}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)-(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$

$f(x)=\frac{(x^2-1)-(x^2-4)}{(x+2)(x-1)}$

$f(x)=\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+4}{(x+2)(x-1)}=\frac{4}{(x+2)(x-1)}$ $x\neq -2$, $x\neq 1$

* Tableau de signes

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
4		$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$(x+2)(x-1)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	

* On cherche x tel que: ← Autre façon de rédiger !

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{(x+2)(x-1)}=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{4=0}_{\text{impossible.}}$ et $(x+2)(x-1)\neq 0$

Ainsi $f(x)=0$ n'a pas de solutions.

Autrement dit $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

* On a: $f(0)=\frac{4}{(0+2)(0-1)}=\frac{4}{-2}=-2$.

Ainsi $A(0;-2)$ est le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

Exercice A4:

1.a) $(x+2)(6x^2-x-2) = 6x^3-x^2-2x+12x^2-2x-4$
$= \underline{6x^3+11x^2-4x-4}$

b) $6x^3+11x^2-4x-4 \geq 0$
$(x+2)(6x^2-x-2) \geq 0$

* Racines de $6x^2-x-2$
On a: $\Delta = (-1)^2-4\times6\times(-2) = 49 > 0$
Il y a deux racines:
$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times6} = \frac{1-7}{2\times6} = -\frac{1}{2}$
$x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

* Tableau de signes:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$6x^2-x-2$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x+2)(6x^2-x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{S = [-2; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{2}{3}; +\infty[}$

2.a) $(x^2-5)(3x^2+x-1) = 3x^4+x^3-x^2-15x^2-5x+5$
$= \underline{3x^4+x^3-16x^2-5x+5}$

b) $3x^4+x^3-16x^2-5x+5 = 0$
$(x^2-5)(3x^2+x-1) = 0$
$x^2-5 = 0$ ou $3x^2+x-1 = 0$
$x^2 = 5$
$x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$

On a $\Delta = 1^2-4\times3\times(-1)$
$\Delta = 13 > 0$
Il y a deux solutions
$x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$
$x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$

$\boxed{S = \left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}; -\sqrt{5}; \sqrt{5}; \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right\}}$

Exercice A5:

$f(x) = -2x^2+4x+3 \quad (x \in \mathbb{R})$
$g(x) = x+4 \quad (x \in \mathbb{R})$

* Etude du signe de $f(x)-g(x)$.
$f(x)-g(x) = (-2x^2+4x+3)-(x+4)$.
$= -2x^2+4x+3-x-4$
$= -2x^2+3x-1$

• Racines de $-2x^2+3x-1$:
$\Delta = 3^2-4\times(-2)\times(-1) = 9-8 = 1 > 0$
Il y a deux racines:
$x_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2\times(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$; $x_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2\times(-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$.

• Tableau de signes:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Position de C_f et C_g.		C_f en dessous de C_g		C_f au dessus de C_g		C_f en dessous de C_g.	

* Conclusion:
Sur $]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$: $f(x) < g(x)$
C_f en dessous de C_g.

Sur $]\frac{1}{2}; 1[$: $f(x) > g(x)$
C_f au dessus de C_g.

Exercice A6.

a) (E'): $X^2-3X+2 = 0$
On a: $\Delta = (-3)^2-4\times1\times2 = 9-8 = 1 > 0$
Il y a deux solutions:
$X_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{3-1}{2} = 1$
$X_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1} = \frac{3+1}{2} = 2$

Donc $\boxed{S_{(E')} = \{1; 2\}}$

b) (E): $x^4-3x^2+2 = 0 \iff (x^2)^2-3(x^2)+2 = 0$
On pose $X = x^2$
$\iff x^2 = 1$ ou $x^2 = 2$
$\iff x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

Donc $\boxed{S_{(E)} = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}}$

Exercice A7.

a) (S) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 + (5-x)^2 = 13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 + 25 - 10x + x^2 = 13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 2x^2 - 10x + 12 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases}$ on a $\times \frac{1}{2}$ les deux membres !

On résout : $x^2 - 5x + 6 = 0$

On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

Il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5-1}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{5+1}{2} = 3$

Ainsi (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x = 2 \text{ ou } x = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - 2 = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 3 = 2 \end{cases}$

Les solutions sont les couples $(x ; y)$ suivants : $(2;3)$; $(3;2)$.

b) (S) $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \geq 0 \\ (x+2)(x-3) \leq 0 \end{cases}$

On cherche les couples $(x;y)$ tels que les deux inéquations soient vérifiées simultanément !

* Racines de $x^2 - 8x + 7$:

On a : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 64 - 28 = 36 > 0$

Il y a deux racines :

$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{8-6}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{8+6}{2} = 7$

* Tableau de signes :

$x^2 - 8x + 7 \geq 0$

x	$-\infty$		-2		1		3		7		$+\infty$
signe x^2-8x+7		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x+2)(x-3)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

$(x+2)(x-3) \leq 0$

Donc $\boxed{S = [-2 ; 1]}$

Exercice B1

1. $u_n = 2n^2 - n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$u_0 = 2\times 0^2 - 0 - 3 = -3$
$u_1 = 2\times 1^2 - 1 - 3 = -2$
$u_2 = 2\times 2^2 - 2 - 3 = 8 - 5 = 3$

2. a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$u_1 = 1$
$u_2 = u_1 + 2\times 1 + 5 = 1 + 7 = 8$
$u_3 = u_2 + 2\times 2 + 5 = 8 + 9 = 17$
$u_4 = u_3 + 2\times 3 + 5 = 17 + 11 = 28$

A l'aide de la calculatrice:

- le 13ième terme : $u_{13} = 217$ (le 1er terme est u_1)
- le terme de rang 20 : $u_{20} = 476$

Exercice B2

1. a) La dernière valeur est celle calculée par $i = 10$ soit $2\times 10 - 1 = 19$

b) $u_n = 2n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2. a) L'algorithme calcule les termes de la suite (u_n) de u_1 à u_{10}.

b) $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 = 1$

Exercice B3.

Partie A (u_n) suite arithmétique avec $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_5 = 17 \end{cases}$

1. a) * Calcul de r

$u_5 = u_1 + (5-1)r$
$17 = 5 + 4r$
$17 - 5 = 4r$
$r = \frac{12}{4} = 3$

* Calcul de u_0.

$u_1 = u_0 + (1-0)r$
$5 = u_0 + 3$
$u_0 = 5 - 3 = 2.$

b) * Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$
$u_{n+1} = u_n + 3$ avec $u_0 = 2$

* $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = u_0 + nr$
$u_n = 2 + 3n$

c) $u_{2021} = 2 + 3\times 2021 = 6\,065$

b) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$u_0 = 3$
$u_1 = \dfrac{1}{u_0 + 1} = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$
$u_2 = \dfrac{1}{u_1 + 1} = \dfrac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$
$u_3 = \dfrac{1}{u_2 + 1} = \dfrac{1}{\frac{4}{5} + 1} = \dfrac{1}{\frac{9}{5}} = \dfrac{5}{9}$

A l'aide de la calculatrice:

- le 1er terme étant u_0, le 13ième terme est : $u_{12} = \dfrac{411}{665}$
- Le terme de rang 20 est $u_{20} \simeq 0{,}618$

3. $S = u_0 + \dots + u_{46} = -1 + u_1 + \dots + u_{46}$

a) Ne convient pas car à la fin la valeur de S correspond à $u_1 + \dots + u_{47}$

b) Ne convient pas car ..... à $u_1 + \dots + u_{46}$

c) Ne convient pas car ..... $u_0 + u_0 + \dots + u_{46}$

d) Convient

i	X	1	.....	46
u	-1			...
S	-1			

$-1 + u_1 = u_0 + u_1 \qquad u_0 + \dots + u_{46}$

d) On cherche n tel que : $u_n \geq 10^3$
$2 + 3n \geq 10^3$
$3n \geq 10^3 - 2$
$n \geq \frac{998}{3}$

or $\frac{998}{3} \simeq 332{,}7$

Ainsi pour $n \geq 333$ on aura $u_n \geq 10^3$

e) L'algorithme va s'arrêter dès que $U \geq 10^p$.
Ainsi le rôle de l'algorithme est de donner la plus petite valeur de n tel que $U_n \geq 10^p$ où $p \geq 1$.

2 a). $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} = u_n + 3$
$u_{n+1} - u_n = 3 \geq 0$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geq u_n$
Donc (u_n) est une suite croissante.

3. $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$

$S = u_0 + (u_0 + 1r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + 9r)$

$S = 10 \times u_0 + (1r + \dots + 9r)$

$S = 10 \times u_0 + r(1 + \dots + 9)$

$S = 10 \times 2 + 3 \times \frac{9(9+1)}{2} = 20 + 3 \times \frac{9 \times 5 \times 2}{2}$ (cours)

$\underline{S = 155}$

Vérifions le calcul avec la formule ci-contre

$S = u_0 + u_1 + \dots u_9$ avec $u_9 = u_0 + 9 \times 3$

$u_9 = 2 + 27 = 29$

$S = 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2}$

$S = \cancel{10}^{5} \times \frac{2 + 29}{\cancel{2}} = 5 \times 31 = \underline{155}$

Partie B: (v_n) suite géométrique telque:

$$\begin{cases} v_2 = 12 \\ v_5 = -96 \end{cases}$$

1.a) * Calcul de q:

$v_5 = v_2 \times q^{5-2}$

$-96 = 12 \times q^3$

$q^3 = \frac{-96}{12}$

$q^3 = -8$ "on cherche q telque $q^3 = -8$"

$\underline{q = -2}$

* Calcul de v_0.

$v_2 = v_0 \times q^{2-0}$

$12 = v_0 \times (-2)^2$

$v_0 = \frac{12}{4} = \underline{3}.$

b) $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$; $v_n = v_0 \times q^n$

$\underline{v_n = 3 \times (-2)^n}$

Exercice B4:

Partie A:

a) $u_n = 10n - n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$

Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$:

on a: $u_{n+1} = 10(n+1) - (n+1)^2$

$= 10n + 10 - (n^2 + 2n + 1)$

$= 10n + 10 - n^2 - 2n - 1$

$= -n^2 + 8n + 9$

Ainsi $u_{n+1} - u_n = (-n^2 + 8n + 9) - (10n - n^2)$

$= -\cancel{n^2} + 8n + 9 - 10n + \cancel{n^2}$

$= -2n + 9$

On cherche $n \in \mathbb{N}$ telque $-2n + 9 \geq 0$

$n \leq \frac{9}{2}$,

• Conjecture: $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Remarque à propos de la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique:

$S = u_0 + \dots + u_n$

Page 3: $S = (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2}$

$S = \frac{(n+1) \times u_0 \times 2 + r \times n(n+1)}{2}$

$S = (n+1) \times \frac{2u_0 + nr}{2}$

$S = (n+1) \times \frac{u_0 + (u_0 + nr)}{2}$

$S = \underbrace{(n+1)}_{\text{Nombre termes de la somme}} \times \underbrace{\frac{u_0 + u_n}{2}}_{\text{Moyenne du 1er et dernier terme de la somme}}$

"Formule avec les mots"

2. Etude du signe de $v_{n+1} - v_n$:

$v_{n+1} - v_n = 3 \times (-2)^{n+1} - 3 \times (-2)^n$

$= 3 \times (-2)^n \times (-2)^1 - 3 \times (-2)^n$

$= 3 \times (-2)^n (-2 - 1)$

$= 3 \times (-2)^n \times (-3)$

$v_{n+1} - v_n = -9 \times (-2)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

On remarque que: si n est pair: $v_{n+1} - v_n \leq 0$

$v_{n+1} \leq v_n$

si n est impair: $v_{n+1} - v_n \geq 0$

$v_{n+1} \geq v_n$

Conclusion:

La suite (v_n) n'est ni croissante, ni décroissante ou (v_n) n'est pas une suite monotone.

3. $S = \sum_{i=0}^{10} v_i = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$

$= v_0 + (v_0 \times q^1) + \dots + (v_0 \times q^{10})$

$= v_0 (1 + q + \dots + q^{10})$

$= v_0 \frac{1 - q^{10+1}}{1 - q}$

$= 3 \times \frac{1 - (-2)^{11}}{1 - (-2)} = \frac{\cancel{3}(1 - (-2)^{11})}{\cancel{3}}$

$= \underline{1 - (-2)^{11}} = \underline{2049}$

Ainsi : (pour $n \leq 4$; $u_{n+1} - u_n \leq 0$)

pour $n \geq 5$; $u_{n+1} - u_n \geq 0$

$u_{n+1} \geq u_n$

On en déduit que, (u_n) est croissante à partir du rang 5.

b) $u_n = \dfrac{n+4}{n+2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$

On a : $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)+4}{(n+1)+2} = \dfrac{n+5}{n+3}$

Ainsi ; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+5}{n+3} - \dfrac{n+4}{n+2}$

$$= \frac{(n+5)(n+2)-(n+4)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+5n+10-(n^2+3n+4n+12)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+\cancel{7n}+10-\cancel{n^2}-\cancel{7n}-12}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{-2}{(n+3)(n+2)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{-2}{(n+3)(n+2)} \leq 0$

$u_{n+1} - u_n \leq 0$

$u_{n+1} \leq u_n$.

Donc (u_n) est une suite décroissante.

e) $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n + 4n - 5$ pour tout n

Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = (\cancel{u_n} + 4n - 5) - \cancel{u_n}$

$= 4n - 5$

On cherche n tel que : $4n - 5 \geq 0$

$n \geq \frac{5}{4}$. $\left(\frac{5}{4} = 1{,}25\right)$

Ainsi, pour $n \geq 2$; $4n - 5 \geq 0$

$u_{n+1} - u_n \geq 0$

$u_{n+1} \geq u_n$

A partir du rang 2, la suite (u_n) est croissante.

c) $u_n = \dfrac{n}{3^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} - \dfrac{n \times 3}{3^n \times 3}$

$$= \frac{(n+1) - 3n}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{-2n+1}{3^{n+1}}$$

On cherche n tel que $-2n+1 \geq 0$

$n \leq \frac{1}{2}$

Ainsi (pour $n \leq 0$ $-2n+1 \geq 0$)

pour $n \geq 1$: $-2n+1 \leq 0$

Donc $\dfrac{-2n+1}{3^{n+1}} \leq 0$

$u_{n+1} - u_n \leq 0$

$u_{n+1} \leq u_n$

Donc (u_n) est une suite décroissante à partir du rang 1.

d) $u_n = 5 \times 3^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = 5 \times 3^{(n+1)+1} - 5 \times 3^{n+1}$

$= 5 \times 3^n \times 3^2 - 5 \times 3^n \times 3$

$= 5 \times 3^n (\underbrace{3^2 - 3}_{6}) =$

$u_{n+1} - u_n = 30 \times 3^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $30 \times 3^n \geq 0$

$u_{n+1} - u_n \geq 0$

$u_{n+1} \geq u_n$

Donc (u_n) est une suite croissante.

f) $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$

Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

$= \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\dots} - \cancel{\frac{1}{n}}$

$= \dfrac{1}{n+1}$

$\forall n \geq 1$: $\dfrac{1}{n+1} \geq 0$

$u_{n+1} \geq u_n$. (u_n) croissante à partir du rang 1.

Partie B

a) $u_n = 3n^2 + 4n - 5$ avec $n \in \mathbb{N}$.

On pose $u_n = f(n)$ et $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ avec $x \geq 0$

* Etude des variations de f.

$f'(x) = 3 \times 2x + 4 = 6x + 4 \quad x \in \mathbb{R}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-2/3$		0		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0			$+$	
Var. f						$\nearrow$	

* f est croissante sur $[0; +\infty[$.
Ainsi (u_n) est croissante.

b) $u_n = -n^3 + 48n$ avec $n \in \mathbb{N}$

On pose: $u_n = f(n)$ et $f(x) = -x^3 + 48x$ avec $x \geq 0$

* Etude des variations de f.

$f'(x) = -3x^2 + 48$ avec $x \geq 0$

On cherche x tel que: $-3x^2 + 48 = 0$

$x^2 = \frac{-48}{-3}$

$x^2 = 16$

$x = -4$ ou $x = 4$.

Tableau de variations

x	0		4		
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Var. f		$\nearrow$		$\searrow$	

* Ainsi f est décroissante sur $[4; +\infty[$.
Donc (u_n) est décroissante à partir du rang 4.

c) $u_n = \frac{1-n^2}{n^2+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$

On pose: $u_n = f(n)$ et $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$ avec $x \geq 0$

* Etude des variations de f.

$f'(x) = \frac{(1-x^2)'(x^2+1) - (1-x^2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \frac{(-2x)(x^2+1) - (1-x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \frac{\cancel{-2x^3} - 2x - 2x + \cancel{2x^3}}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$ avec $x \geq 0$

Tableau de variation:

x	0	$+\infty$
$-4x$		$-$
$(x^2+1)^2$		$+$
signe $f'(x)$		$-$
Var f		$\searrow$

* Ainsi f est décroissante sur $[0; +\infty[$.
Par conséquent, (u_n) est décroissante.

Exercice B5:

$u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 0{,}2u_n + 0{,}6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On pose $v_n = u_n - 0{,}75$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.a) On a: $v_{n+1} = u_{n+1} - 0{,}75$

$v_{n+1} = (0{,}2u_n + 0{,}6) - 0{,}75$

$v_{n+1} = 0{,}2u_n + 0{,}6 - 0{,}75$

$v_{n+1} = 0{,}2u_n - 0{,}15$

$v_{n+1} = 0{,}2\left(u_n - \frac{0{,}15}{0{,}2}\right)$

$v_{n+1} = 0{,}2(u_n - 0{,}75)$

$v_{n+1} = 0{,}2\, v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = -1{,}75 \times 0{,}2^n$

c) $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$= v_0 + v_0 \times q + \dots + v_0 \times q^n$

$= v_0(1 + q + \dots + q^n)$

$= v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$S_n = -1{,}75 \times \frac{1-0{,}2^{n+1}}{1-0{,}2} = \frac{-1{,}75(1-0{,}2^{n+1})}{-0{,}8}$

$S_n = 2{,}1875(1-0{,}2^{n+1})$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,2$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 0,75 = -1 - 0,75 = -1,75$.

2. a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 0,75$
$v_n + 0,75 = u_n$
$u_n = v_n + 0,75$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = -1,75 \times 0,2^n + 0,75$

b). Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = (0,2u_n + 0,6) - u_n$
$= -0,8u_n + 0,6$
$= -0,8(-1,75 \times 0,2^n + 0,75) + 0,6$
$= +1,4 \times 0,2^n - \cancel{0,6} + \cancel{0,6}$
$= 1,4 \times 0,2^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $1,4 \times 0,2^n \geq 0$
$u_{n+1} - u_n \geq 0$
$u_{n+1} \geq u_n$

Donc (u_n) est une suite croissante.

c) $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
$= (v_0 + 0,75) + (v_1 + 0,75) + \ldots + (v_n + 0,75)$
$= (n+1) \times 0,75 + \underbrace{(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)}_{S_n}$
$= (n+1) \times 0,75 + 2,1875(1 - 0,2^{n+1})$

Exercice B6

1. La population mondiale augmente de 1%/an.
Ainsi la population à l'année $2010 + (n+1)$ est $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{100} u_n$
$u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{100}\right) u_n$
$u_{n+1} = 1,01 u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (u_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 1,01$ et de 1er terme $u_0 = 6,9$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = u_0 \times q^n$
$u_n = 6,9 \times 1,01^n$

3. $2025 = 2010 + 15$
En 2025, la population mondiale est $u_{15} = 6,9 \times 1,01^{15} \simeq 8,01$ milliards

4. Calculatrice : $u_{26} \simeq 8,94$.
$u_{27} \simeq 9,03$.

Ainsi en $2010 + 27 = 2037$ les 9 milliards d'habitants seront atteints.

Exercice B7

1. $u_2 = u_1 + \frac{2}{100} u_1 = 500 + \frac{2 \times 500}{100} = 510$
$u_3 = u_2 + \frac{2}{100} u_2 = 510 + \frac{2}{100} \times 510 = 520,20$
La prime versée la 2ème année est 510 € et celle versée la 3ème année 520,20 €

2. a) Chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente

Ainsi $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100} u_n$
$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{100}\right) u_n$
$u_{n+1} = 1,02 u_n$ pour tout $n \geq 1$

On en déduit que (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et 1er terme $u_1 = 500$

b) $\forall n \geq 1$; $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
$u_n = 500 \times 1,02^{n-1}$

3. a) La 25ème année la prime versée est $u_{25} = 500 \times 1,02^{25-1} = 500 \times 1,02^{24} \simeq 804$
soit environ 804 €

b) $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{25}$
$= u_1 + u_2 \times q + u_3 \times q^2 + \cdots + u_{25} \times q^{24}$
$= u_1 \times (1 + q + q^2 + \ldots q^{24})$
$= u_1 \times \frac{1 - q^{24+1}}{1 - q}$

Exercice B8:

Partie A:

1. Le nombre d'ouvrage "l'année n+1" soit u_{n+1} (en milliers) est composé de:
   - ceux de l'année n" dont on a supprimé 5%
     soit $u_n - \frac{5}{100}u_n \cdot (1-\frac{5}{100}) = u_n = 0{,}95\,u_n$ (milliers)
   - auxquels s'ajoute 6 milliers de nouveaux livres.

   Ainsi $u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Partie B.

$v_{n+1} = 0{,}95\,v_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$v_0 = 42$

1. On pose $w_n = v_n - 80$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   On a: $w_{n+1} = v_{n+1} - 80$

   $= (0{,}95\,v_n + 4) - 80$

   $= 0{,}95\,v_n - 76$

   $w_{n+1} = 0{,}95\left(v_n - \frac{76}{0{,}95}\right)$

   $w_{n+1} = 0{,}95\,(v_n - 80)$

   $w_{n+1} = 0{,}95\,w$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   Ainsi (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de 1er terme $w_0 = v_0 - 80$
   $= 42 - 80 = -38$

2. a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $w_n = w_0 \times q^n$

   $w_n = -38 \times 0{,}95^n$

   $\forall n \in \mathbb{N}$; $w_n = v_n - 80$ soit $v_n = w_n + 80$

   $w_n = -38 \times 0{,}95^n + 80$

$S = 500 \times \frac{1 - 1{,}02^{25}}{1 - 1{,}02}$

$S = 500\,\frac{(1 - 1{,}02^{25})}{-0{,}02}$

$S = -25000\,(1 - 1{,}02^{25})$

$S \simeq 16\,015$

Sur 25 ans, la somme totale des primes est d'environ 16 015 euros.

2. L'algorithme va s'arrêter lorsque $U \geqslant 100$

   Autrement dit, l'algorithme permettra de connaître la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 100$

   On pourra alors déterminer l'année où le nombre d'ouvrages va dépasser 100 000 (capacité de la médiathèque).

3. $u_{26} \simeq 99{,}445$ et $u_{27} \simeq 100{,}47$.

   A la fin de l'algorithme: $u = 100{,}47$
   $n = 27$.

   Ainsi en $2022 + 27 = 2049$ la médiathèque dépassera les 100 000 ouvrages.

b) (w_n) est une suite géométrique avec
$q = 0{,}95$ soit $-1 < q < 1$
$w_0 = -38$ $w_0 < 0$
Donc (w_n) est une suite croissante (cours)

SINON Etudier le signe de $v_{n+1} - v_n$

$v_{n+1} - v_n = (-38 \times 0{,}95^{n+1} + 80) - (-38 \times 0{,}95^n + 80)$

$= -38 \times 0{,}95^n (0{,}95 - 1)$

$= -38 \times 0{,}95 \times (-0{,}05)$ ....signe + croissante

c) Conjecture: $\lim_{n \to +\infty} v_n = 80$

d) Le nombre d'ouvrages va augmenter et se stabilisera à long terme autour de 80 000.
Avec ce choix la capacité de la médiathèque ne sera jamais dépassée.

Exercice B

Partie A.

1. $f(x) = 3 - 4 \times \frac{1}{x+1}$ avec $x \in [0; +\infty[$

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ (somme de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

$f'(x) = (3)' - 4 \times \left(-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}\right)$ car $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

$f'(x) = 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$

$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ avec $x \in [0; +\infty[$.

$\forall x \in [0;+\infty[$ $f'(x) > 0$ (quotient de nombres s^t positifs sur $[0;+\infty[$

Donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

ou Tableau de variations

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
4	$+$
$(x+1)^2$	$+$
signe $f'(x)$	$+$
var f	-1 $\nearrow$

$f(0) = 3 - \frac{4}{0+1} = -1$

2. (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1$

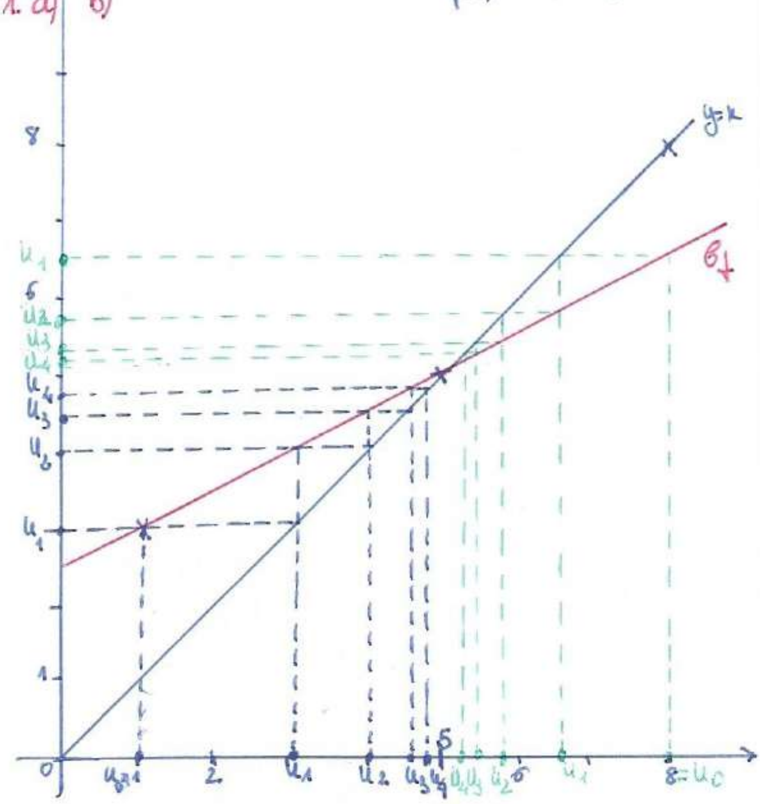
$y = 1(x-1) + 1$ $\quad\quad$ $f(1) = 3 - \frac{4}{1+1} = 3 - 2 = 1$.

$y = x$

Exercice B10

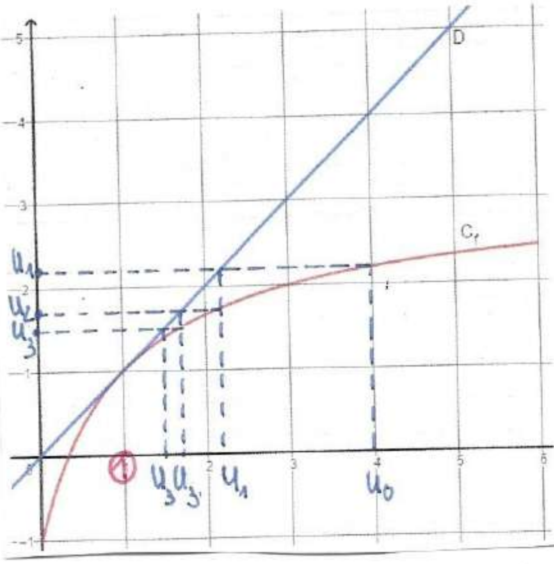
x	1	5
$f(x)$	3	5

1. a) b)



Partie B.

1.



2. Conjectures : • (u_n) est décroissante

• $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

c) Conjectures : Pour $u_0 = 1$: (u_n) est croissante

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$.

2 a) b) voir graphique précédent (Tracé en vert)

e) Conjectures Pour $u_0 = 8$: (u_n) est décroissante

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$

Remarque :

Suite définie de façon explicite par $u_n = f(n)$

"(u_n) et f ont le même sens"

⚠ Suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(n)$

"(u_n) et f n'ont pas forcément le même sens de variation"

Exercice B11

1. $u_n = e^{\frac{1}{3}n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

a) $u_3 = e^{\frac{1}{3}\times 3-1} = e^{1-1} = e^{0} = \underline{1}.$

b) Déterminons la nature de (u_n)
c-à-d (u_n) est-elle une suite arithmétique ou géométrique.

on a: $u_{n+1} = e^{\frac{1}{3}(n+1)-1}$

$= e^{\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}-1}.$

$= \underbrace{\left(e^{\frac{1}{3}n-1}\right)}\times e^{\frac{1}{3}}$

$u_{n+1} = u_n \times e^{\frac{1}{3}}$

Ainsi (u_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{\frac{1}{3}}$ et de 1er terme $u_0 = e^{\frac{1}{3}\times 0-1} = e^{-1}$

2. $u_n = \frac{n+1}{e^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Etudions le sens de variations de (u_n)

* on pose $u_n = f(n)$ $n \in \mathbb{N}$
avec $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ $x \in [0;+\infty[$

* f est dérivable sur $[0;+\infty[$.

$f'(x) = \frac{(x+1)'(e^x) - (x+1)(e^x)'}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{1\times e^x - (x+1)\times e^x}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{\cancel{e^x} - xe^x \cancel{- e^x}}{e^x \times e^x}$

$f'(x) = \frac{-x}{e^x}$ $x \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} \forall x \geq 0 : e^x > 0 \\ -x \leq 0 \end{array}\right\} *$

Donc $f'(x) \leq 0$ pour $x \in [0;+\infty[$
Ainsi f est décroissante sur $[0;+\infty[$ et par conséquent (u_n) est croissante!

OU

* Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+1}{e^{n+1}} - \frac{n+1}{e^n}$

$= \frac{n+2}{e^n \times e^1} - \frac{(n+1)\times e^1}{e^n \times e^1}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2 - e(n+1)}{e^{n+1}}$

$= \frac{(1-e)n + 2 - e}{e^{n+1}}$

on cherche n tel que:
$(1-e)n + 2 - e \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{-2+e}{1-e}$
or $1-e < 0$

$\simeq -0{,}4$ impossible

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$
$u_{n+1} \geq u_n$

(u_n) est une suite croissante

c) Déterminons le sens de variation de (u_n)
Méthode à votre choix!

* on a: $u_n = e^{\frac{1}{3}n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$

Ainsi $u_n = f(n)$ avec $f(x) = e^{\frac{1}{3}x-1}$ $x \in [0;+\infty[$

* Etude des variations de f sur $[0;+\infty[$

• f est dérivable sur $[0;+\infty[$ (composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$)

$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{3}x-1}\right)'$

$= \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

• $\forall x \in [0;+\infty[$ $f'(x) > 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{\frac{1}{3}x-1} > 0$ et $\frac{1}{3} > 0$.

Donc f est croissante sur $[0;+\infty[$
Par conséquent, la suite (u_n) est croissante

Autre méthode:

Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = e^{\frac{1}{3}(n+1)-1} - e^{\frac{1}{3}n-1}$

$= e^{\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}-1} - e^{\frac{1}{3}n-1}$

$= \left(e^{\frac{1}{3}n-1}\right)\times e^{+\frac{1}{3}} - e^{\frac{1}{3}n-1}$

$= e^{\frac{1}{3}n-1} \times \left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right)$

$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}\ e^{\frac{1}{3}n-1} > 0 \\ e^{\frac{1}{3}} - 1 > 0 \end{array}\right\} *$ $(e^{\frac{1}{3}} - 1 \simeq 0{,}4)$

* Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$
$u_{n+1} \geq u_n$

Donc (u_n) est une suite croissante.

Exercice C1.

a) $\mathcal{D}_f = [-4;5]$

b) $f'(-3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{+1} = \underline{-4}$

Explication pour vous
$f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -3

point$(-3;1)$
-4
$+1$
$(-2;-3)$

$f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{-1} = \underline{4}$

$f'(3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{+2} = \underline{-\frac{3}{2}}$

$f'(4) = \underline{0}$ (tangente horizontale)

Interprétation $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.

Exercice C3

- $A(0;-4) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(0) = -4$
$\Leftrightarrow a\times 0^3 + b\times 0^2 + c\times 0 + d = -4$
$\Leftrightarrow d = -4$

Ainsi $\underline{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4.}$

- $B(1;0) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(1) = 0$
$\Leftrightarrow a\times 1^3 + b\times 1^2 + c\times 1 - 4 = 0$
$\Leftrightarrow \underline{a+b+c = 4}$ (1)

- De plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$* C(0;3) \in \mathcal{C}_{f'} \Leftrightarrow f'(0) = 3$
$\Leftrightarrow 3a\times 0^2 + 2b\times 0 + c = 3$
$\Leftrightarrow \underline{c = 3}.$

Ainsi $\underline{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$ et (1) $a + b + 3 = 4$
$\underline{a + b = 1}$

$* D(1;4) \in \mathcal{C}_{f'} \Leftrightarrow f'(1) = 4$
$\Leftrightarrow 3a\times 1^2 + 2b\times 1 + 3 = 4$
$\Leftrightarrow \underline{3a + 2b = 1}.$

- On résout le système :

$$\begin{cases} a+b = 1 & (L_1) \\ 3a+2b = 1 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-2b = -2 & (-2L_1) \\ 3a+2b = 1. & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 & (-2L_1)+(L_2) \\ -1+b = 1. & (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = +2 \end{cases}$$

Donc $\underline{f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 4}$ $(x \in \mathbb{R})$

Exercice C2

1. Conjecture : $f'(a) = 0$ pour $a = -3$
$a = 0$
$a = 2$

Aux points d'abscisse a tels que $f'(a) = 0$ la tangente à la courbe $\underline{\text{est horizontale}}$

2. a) Explication pour vous
La fonction f s'annule en $x=-5$; $x=-1$, $x=2$
$\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'axe des abscisses sur $]-5;-1[$ donc $f(x) < 0$ pour $x \in]-5;-1[$
... etc.

Tableau de signes

x	-5		-1		2		4
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

b) Tableau de variations de f.

x	-5		-3		0		2		4
Var. f	0	↘	-4	↗	2	↘	0	↗	5

On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$

x	-5		-3		0		2		4
Signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3 • (AB) : $y = ax + b$ avec $A(1;1)$ $B(-1;4)$

$* a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{-1-1} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$ $\quad \xrightarrow{} \Delta y$, $\xrightarrow{} \Delta x$

B -2 $+3$
Vérification... graphique !

Donc (AB) : $y = -\frac{3}{2}x + b$

$* A(1;1) \in (AB) \Leftrightarrow y_A = -\frac{3}{2}x_A + b$

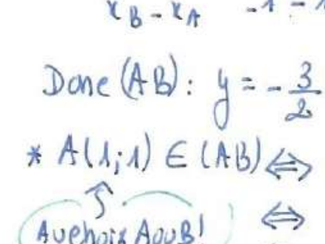
Au choix A ou B !

$\Leftrightarrow 1 = -\frac{3}{2}\times 1 + b$
$\Leftrightarrow 1 + \frac{3}{2} = b$
$\Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$

Ainsi (AB) : $\underline{y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}}$

- $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, donc le coefficient directeur de la droite (AB)
Ainsi $f'(1) = -\frac{3}{2}$

4.



(T) : $y = 2x + 1$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2
Ainsi $\underline{f'(-2) = 2}$.

Explication....
Tracé de (T) : Deux points ou un point et coeff. directeur

Exercice C4

1.a) Tableau de signes.

x	-1		0		2		3
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Explication....
→ On donne $C_{f'}$
→ f' s'annule en $x=0$ et $x=2$
.....

b) Tableau de variations de f.

x	-1		0		2		3
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Var. f	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$

(on ne connait pas les valeurs de $f(-1)$; $f(0)$....)

3.a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \quad x \in \mathbb{R}$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \quad x \in \mathbb{R}$

(Racines de $3x^2 - 6x$: $3x^2 - 6x = 0$
$3x(x-2) = 0$
$3x = 0$ ou $x - 2 = 0$
$x = 0 \quad x = +2$)

• Tableau de variations

x	-1		0		2		3
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Var. f	-1	↗	3	↘	-1	↗	0

$f(-1) = (-1)^3 - 3\times(-1)^2 + 3 = -1 - 3 + 3 = -1$

$f(0) = 3$; $f(2) = -1$ $\quad f(3) = 0$ d'après 2.

Le tableau de variation est cohérent avec celui de 1.b)

4. **Aide**: On développe $(x-1)^3$:

$(x-1)^3 = (x-1)(x-1)^2 = (x-1)(x^2 - 2x + 1)$
$= x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1$
$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Etude du signe de :

$f(x) - (-3x+4) = (x^3 - 3x^2 + 3) - (-3x + 4)$
$= x^3 - 3x^2 + 3 + 3x - 4$
$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$= (x-1)^3 \quad (x-1)^3 \equiv !$
$= \underbrace{(x-1)}_{\text{expression } ax+b} \underbrace{(x-1)^2}_{\text{expression } ax^2+bx+c\,!} \quad x \in \mathbb{R}$.

2. On cherche a; b et c tels que
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

• $f(0) = 3 \Leftrightarrow 0^3 + a\times 0^2 + b\times 0 + c = 3 \Leftrightarrow c = 3$

Donc $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$

• $f(1) = 1 \Leftrightarrow 1^3 + a\times 1^2 + b\times 1 + 3 = 1$
$\Leftrightarrow a + b = -3$

• $f(2) = -1 \Leftrightarrow 2^3 + a\times 2^2 + b\times 2 + 3 = -1$.
$\Leftrightarrow 4a + 2b = -8 - 3 - 1$
$\Leftrightarrow 4a + 2b = -12$
$\Leftrightarrow 2a + b = -6$

On résout le système:

$\begin{cases} a + b = -3 \ (L_1) \\ 2a + b = -6 \ (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b = 3 \ (-L_1) \\ 2a + b = -6 \ (L_2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 & (-L_1) + (L_2) \\ -3 + b = -3 & (L_1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$

Donc $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \quad x \in \mathbb{R}$.

3. b) (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = -3$ (par lecture graphique 1.)

$y = -3(x-1) + 1$
$y = -3x + 3 + 1$
$y = -3x + 4$.

$f(1) = 1$ d'après 2

Explication....
Sinon effectuer les calculs.... perte temps!

Tableau de signes

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f(x) - (-3x+4) = (x-1)^3$		$-$	0	$+$	

d) Pour $x \in]-\infty; 1[$: $f(x) - (-3x+4) < 0$
$f(x) < -3x + 4$
C_f en dessous de (T)

Pour $x \in]1; +\infty[$: $f(x) - (-3x+4) > 0$
$f(x) > -3x + 4$
C_f au dessus de (T)

Exercice C5

Partie A :

1. $g(x) = -4x^3 + 3x^2 + 2$ avec $x \in [-2;1]$.

- g est dérivable sur $[-2;1]$ (fonction polynôme)

$g'(x) = -4 \times 3x^2 + 3 \times 2x + 0$

$g'(x) = -12x^2 + 6x = 6x(-2x+1)$ $x \in \mathbb{R}$.

- Tableau de variations

x	-2		0		$1/2$		1
signe $g'(x)$		$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$	
Var. g	46	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	1

$g(-2) = -4 \times (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 + 2 = -4 \times (-8) + 3 \times 4 + 2 = \underline{\underline{46}}$

$g(0) = -4 \times 0^3 + 3 \times 0^2 + 2 = \underline{\underline{2}}$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = -4 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + 2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 2 = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$

$g(1) = -4 \times 1^3 + 3 \times 1^2 + 2 = -4 + 5 = \underline{\underline{1}}$

2. Sur $[-2;1]$, f admet un minimum en $x = 1$ qui vaut 1 et un maximum en $x = -2$ qui vaut 46.

Donc $\forall x \in [-2;1]$: $1 \leq f(x) \leq 46$

Autrement dit : $\underline{\forall x \in [-2;1]\ f(x) > 0}$

Partie B.

1. $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x$ $x \in [-2;1]$

- f est dérivable sur $[-2;1]$ car c'est une fonction polynôme.
- $f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 2 \times 1$

$\underline{f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 2 \quad x \in [-2;1]}$.

2. On remarque que : $f'(x) = g(x)$ $x \in [-2;1]$

or $\underline{\forall x \in [-2;1]\ g(x) > 0}$ d'après A

Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) > 0}$

Tableau de variations

x	-2		1
signe $f'(x)$		$+$	
Var. f	-28	$\nearrow$	2

$f(-2) = -(-2)^4 + (-2)^3 + 2 \times (-2)$
$= -16 - 8 - 4$
$= -28$

$f(1) = -1^4 + 1^3 + 2 \times 1 = 2$

3. (T) : $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$ avec $f'(-1) = -4 \times (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 2$
$= -4 \times (-1) + 3 \times 1 + 2$
$= 13$

$f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 2 \times (-1)$
$= -1 - 1 - 2 = -4$

$y = 13(x+1) - 4$

$y = 13x + 13 - 4$

$\underline{y = 13x + 9}$

4. (d) : $y = 2x + 1$ a pour coefficient directeur 2.

On cherche $x \in [-2;1]$ tels que :

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow -4x^3 + 3x^2 + 2 = 2$

$\Leftrightarrow -4x^3 + 3x^2 = 2 - 2$

$\Leftrightarrow x^2(-4x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $-4x + 3 = 0$

$\underline{x = 0 \in [-2;1]}$ $\quad x = \frac{3}{4} \in [-2;1]$.

Aux points d'abscisse 0 et $\frac{3}{4}$, $\mathcal{C}_f$ admet des tangentes parallèles à (d).

Exercice C6

1. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ (Une fonction polynôme est déf. sur $\mathbb{R}$)

b) - f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3 \times 2x - 2 \times 1 = \underline{6x - 2 \quad x \in \mathbb{R}}$.

- on cherche x tel que $6x - 2 = 0 \Leftrightarrow 6x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

- Tableau de variations.

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	ϕ	$+$	
Var. f		$\searrow$	$14/3$	$\nearrow$	

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 5 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{15}{3} = \frac{14}{3}$

2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

b) - f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)

- $f'(x) = 3x^2 - 6 \times 2x + 9 \times 1 = \underline{3x^2 - 12x + 9}$ $(x \in \mathbb{R})$

- Racines $3x^2 - 12x + 9$:

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 36 > 0$. Il y a deux racines

$x_1 = \frac{-(-12) - \sqrt{36}}{2 \times 3} = \frac{12-6}{6} = 1$; $x_2 = \frac{-(-12) + \sqrt{36}}{2 \times 3} = 3$

- Tableau de variations

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
signe $f'(x)$		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	
Var. f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$!

a) f est définie si $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

b) • f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ (comme somme de fonctions dérivables sur ces intervalles)

• $f'(x) = (x)' + \left(\dfrac{1}{x}\right)' = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

$= \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ $x \in \mathbb{R}^*$

• Tableau de variation:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	||	$+$		$+$	
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Var. f		↗	-2	↘	||	↘	2	↗	

$f(-1) = -1 + \dfrac{1}{-1} = -1 - 1 = -2$

$f(1) = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$

5. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$!

a) f est définie si $x - 3 \neq 0$
$x \neq 3$ Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{+3\}$.

b) • f est dérivable sur $]-\infty; +3[$ et sur $]3; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivable sur ces intervalles. ↳ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

• $f'(x) = \dfrac{(2x-1)'(x-3) - (2x-1)(x-3)'}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2(x-3) - (2x-1)(1)}{(x-3)^2} = \dfrac{\cancel{2x} - 6 - \cancel{2x} + 1}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$ avec $x \neq 3$.

• Tableau de variations.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
-5		$-$	||	$-$	
$(x-3)^2$		$+$	||	$+$	
Signe $f'(x)$		$-$	||	$-$	
Var. f		↘	||	↘	

$f(1) = 1^3 - 6\times1^2 + 9\times1 = 1 - 6 + 9 = 4$

$f(3) = 3^3 - 6\times3^2 + 9\times3 = 27 - 6\times9 + 27 = 0$

4. $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$!

a) f est définie si $x \geq 0$: $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$ (ou $\mathbb{R}^+$)

b). • f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (comme produit de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$) ↓ $(uv)' = u'v + uv'$

• $f'(x) = (2-x)'(\sqrt{x}) + (2-x)(\sqrt{x})'$

$= (-1)\sqrt{x} + (2-x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{(-\sqrt{x})(2\sqrt{x}) + (2-x)\times 1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{-2x + 2 - x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-3x+2}{2\sqrt{x}}$ avec $x > 0$

• On cherche x tel que: $-3x + 2 = 0 \iff x = \dfrac{2}{3}$

• Tableau de variations:

x	0		$2/3$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	0	$-$	
$2\sqrt{x}$		$+$		$+$	
Signe $f'(x)$	|	$+$	0	$-$	
Var. f	0	↗	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	↘	

$f(0) = (2-0)\times\sqrt{0} = 0$

$f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \left(2 - \dfrac{2}{3}\right)\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$

a) f est définie si $x + 1 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$x \neq -1$

b). f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles

• $f'(x) = \dfrac{(x^2-3x)'(x+1) - (x^2-3x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x)\times1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - \cancel{3x} - 3 - x^2 + \cancel{3x}}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$ avec $x \neq -1$

• Racines de $x^2 + 2x - 3$:

$\Delta = 2^2 - 4\times1\times(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$. Il y a deux racines:

$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2\times1} = \dfrac{-2-4}{2} = -3$; $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times1} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$

* Tableau de variations:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	||	$+$		$+$	
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Var. f		↗	-9	↘	||	↘	-1	↗	

$f(-3) = \dfrac{(-3)^2 - 3\times(-3)}{-3+1} = \dfrac{18}{-2} = -9$

$f(1) = \dfrac{1^2 - 3\times1}{1+1} = \dfrac{1-3}{2} = -1$

7. $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 2x + 5}$!

a) f est définie si : $3x^2 - 2x + 5 \neq 0$

On a : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -64 < 0$

Donc $3x^2 - 2x + 5$ n'a pas de racines.

$\forall x \in \mathbb{R}$; $3x^2 - 2x + 5 \neq 0$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

b). f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

- $f'(x) = - \dfrac{(3x^2 - 2x + 5)'}{(3x^2 - 2x + 5)^2} = - \dfrac{(6x - 2)}{(3x^2 - 2x + 5)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-6x + 2}{(3x^2 - 2x + 5)^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$

De plus : $-6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3}$

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
$-6x+2$		$+$	0	$-$	
$(3x^2-2x+5)^2$		$+$		$+$	
signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Var. f		$\nearrow$	$3/14$	$\searrow$	

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 5} = \dfrac{1}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{15}{3}}$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{\frac{14}{3}} = \dfrac{3}{14}$

8. $f(x) = 3\sqrt{-2x + 5}$!

a) f est définie si $-2x + 5 \geq 0$

$-2x \geq -5$

$x \leq \dfrac{-5}{-2}$

$x \leq \dfrac{5}{2}$ $\quad \mathcal{D}_f = \left]-\infty ; \dfrac{5}{2}\right]$

b). f est dérivable sur $\left]-\infty ; \dfrac{5}{2}\right[$ comme composée de fonctions dérivables sur $\left]-\infty ; \dfrac{5}{2}\right[$

Rappel : $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt{ax+b})' = a \times \dfrac{1}{2\sqrt{ax+b}}$

- $f'(x) = 3 \times (\sqrt{-2x+5})' = 3 \times \dfrac{\cancel{(-2)}}{} \times \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{-2x+5}}$ $\quad -1 \times 2$

$f'(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{-2x+5}}$ avec $x < \dfrac{5}{2}$.

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		$5/2$
-3		$-$	
$\sqrt{-2x+5}$		$+$	
signe $f'(x)$		$-$	$\Vert$
Var. f		$\searrow$	0

$f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0$ (voir a)

Exercice C7

$f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + x + 4}$!

1. f est définie si $x^2 + x + 4 \neq 0$

Or $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15 < 0$

Donc $x^2 + x + 4$ n'a pas de racines

$\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 + x + 4 \neq 0$

Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Signe de $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2 + x + 4}$ $\quad x \in \mathbb{R}$.

On a : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 + x + 4 > 0$ d'après 1.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
x^2+x+4		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi sur $]-\infty ; 3[$ $f(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ en dessous de l'axe des abscisses

sur $]3 ; +\infty[$ $f(x) > 0$ .... au dessus...

3 a). f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

- $f'(x) = \dfrac{(x-3)'(x^2+x+4) - (x-3)(x^2+x+4)'}{(x^2+x+4)^2}$

$f'(x) = \dfrac{1 \times (x^2+x+4) - (x-3)(2x+1)}{(x^2+x+4)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2+x+4 - (2x^2 + x - 6x - 3)}{(x^2+x+4)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2+x+4 - 2x^2 + 5x + 3}{(x^2+x+4)^2} = \dfrac{-x^2 + 6x + 7}{(x^2+x+4)^2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

- Racines de $-x^2 + 6x + 7$:

On a : $\Delta = 6^2 - 4 \times (-1) \times 7 = 36 + 28 = 64 > 0$

Il y a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-6-8}{-2} = 7$; $x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-6+8}{-2} = -1$

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$-x^2+6x+7$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+x+4)^2$		$+$		$+$		$+$	
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Var. f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{\ldots}$	$\searrow$	

Exercice C8

1. a) Le patron est composé :
- d'un carré de côté x
- de 4 rectangles de dimensions x et h

Ainsi l'aire du patron est :

$$x^2 + 4(x \times h) = \underline{x^2 + 4xh \ (cm^2)}$$

b) Le volume de la boîte est

$$V = A_{\text{base carrée}} \times \text{hauteur} = \underline{x^2 \times h \ (cm^3)}$$

2. $V = 500 \iff x^2 \times h = 500$

$\iff h = \dfrac{500}{x^2}$ avec $x \neq 0$

- L'aire du patron : $A(x) = x^2 + 4x \times \left(\dfrac{500}{x^2}\right)$

$$A(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

3. Etude des variations de A sur $]0;+\infty[$.

$A(x) = x^2 + 2000 \times \dfrac{1}{x}$ $\quad x \in]0;+\infty[$.

* $A'(x) = 2x + 2000 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2x^3 - 2000}{x^2}$

$A'(x) = \dfrac{2(x^3 - 1000)}{x^2}$ or $(x-10)(x^2+10x+100)$
$= x^3 + \cancel{10x^2} + \cancel{100x} - \cancel{10x^2} - \cancel{100x} - 1000$

$A'(x) = \dfrac{2(x-10)(x^2+10x+100)}{x^2}$ $= x^3 - 1000$

avec $x > 0$

* Racines de $x^2 + 10x + 100$

On a : $\Delta = 10^2 - 4 \times 1 \times 100 = 100 - 400 = -300 < 0$

Il n'y a pas de racines.

* Tableaux de variations

x	0		10		$+\infty$
$2(x-10)$		$-$	0	$+$	
$x^2+10x+100$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
signe $A'(x)$		$-$	0	$+$	
Var A.		$\searrow$	300	$\nearrow$	

$A(10) = 10^2 + \dfrac{2000}{10} = 100 + 200 = 300$

* Sur $]0;+\infty[$, A admet un minimum en 10 qui vaut 300.

Ainsi l'aire du patron est minimale pour $\underline{x = 10 \text{ cm}}$.

$f(-1) = \dfrac{-1-3}{(-1)^2 - 1 + 4} = \dfrac{-4}{\cancel{1} - \cancel{1} + 4} = -1 \quad f(7) = \dfrac{7-3}{7^2 + 7 + 4} = \dfrac{4}{60} = \dfrac{1}{15}$

4. $(T) : y = f'(-5)(x - (-5)) + f(-5)$ avec $f'(-5) = \dfrac{-(-5)^2 + 6 \times (-5) + 7}{((-5)^2 - 5 + 4)^2}$

$f'(-5) = \dfrac{-25 - 30 + 7}{(25-1)^2}$

$f'(-5) = \dfrac{-48}{24^2} = \dfrac{-2 \times 24}{24 \times 24}$

$f'(-5) = -\dfrac{1}{12}$

$f(-5) = \dfrac{-5-3}{(-5)^2 - 5 + 4} = \dfrac{-8}{24} = -\dfrac{1}{3}$

$y = -\dfrac{1}{12}(x+5) - \dfrac{1}{3}$

$y = -\dfrac{1}{12}x - \dfrac{5}{12} - \dfrac{4}{12}$

$y = -\dfrac{1}{12}x - \dfrac{9}{12}$

$\underline{y = -\dfrac{1}{12}x - \dfrac{3}{4}.}$

Exercice C9

1. a) $A = \dfrac{(e^{-1})^4}{e} = \dfrac{e^{-1 \times 4}}{e^1} = e^{-4-1} = \underline{e^{-5}}$

$B = \dfrac{e^2 \times e^3}{e^{-3}} = \dfrac{e^{2+3}}{e^{-3}} = e^{5-(-3)} = \underline{e^8}$

b) $C = e^{3x+1} \times e^{-x+2}$

$C = e^{3x+1-x+2}$

$\underline{C = e^{2x+3}}$

$D = e^x(e^{-x} + 2e^x)$

$D = e^x \times e^{-x} + 2e^x \times e^x$

$D = e^0 + 2e^{2x}$

$\underline{D = 1 + 2e^{2x}}$

$E = \dfrac{e^{-4x-5}}{e^{1-2x}}$

$E = e^{-4x-5-(1-2x)}$

$\underline{E = e^{-2x-6}}$

$F = (\underbrace{e^{2x} \times e^{-x}})^3$

$F = (e^x)^3$

$\underline{F = e^{3x}}$

$G = (e^{3x-5})^2 \times (e^{2-x})^3$

$G = e^{(3x-5) \times 2} \times e^{(2-x) \times 3}$

$G = e^{6x-10} \times e^{6-3x}$

$\underline{G = e^{3x-4}}$

$H = \dfrac{e^{-3x-5} \times (e^{2x-1})^2}{\underbrace{e^{1-x} \times e^{3x}}}$

$H = \dfrac{e^{-3x-5} \times e^{(2x-1) \times 2}}{e^{1+2x}}$

$H = \dfrac{e^{-3x-5} \times e^{4x-2}}{e^{1+2x}}$

$H = \dfrac{e^{x-7}}{e^{1+2x}} = e^{x-7-(1+2x)}$

$\underline{H = e^{-x-8}}$

2. a) $\dfrac{e^{3x+1}}{e^{2x}} - e^x = e^{3x+1-(2x)} - e^x$

$= e^{x+1} - e^x$

$= e^x \times e^1 - e^x$

$= \underline{e^x(e^1 - 1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Suite exercice C9

3. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \dfrac{\cancel{e^{-x}}\left(\dfrac{e^x}{e^{-x}}+1\right)}{\cancel{e^{-x}}\left(\dfrac{e^x}{e^{-x}}-1\right)}$

$= \dfrac{e^{x-(-x)}+1}{e^{x-(-x)}-1}$

$= \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \quad \forall x \neq 0$

$\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^x} = \dfrac{e^{-x}(1+e^{2x})}{e^{-x}(1-e^x)}$

$= \dfrac{e^{-x}+e^{-x}\times e^{2x}}{e^{-x}-e^{-x}\times e^x}$

$= \dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-\underbrace{e^0}_{1}}$

$= \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}-1} \quad \forall x \neq 0.$

4. $(e^x-1)(2e^x-1) = 2(e^x)^2-e^x-2e^x+1$
$= 2e^{2x}-3e^x+1.\ \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}+1} = \dfrac{\cancel{e^{-x}}\left(1+\dfrac{e^x}{e^{-x}}\right)}{\cancel{e^{-x}}\left(1+\dfrac{1}{e^{-x}}\right)}$

$= \dfrac{1+e^{x-(-x)}}{1+e^x}$

$= \dfrac{1+e^{2x}}{1+e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

ou

$\dfrac{1+e^{2x}}{1+e^x} = \dfrac{\cancel{e^x}\left(\dfrac{1}{e^x}+e^x\right)}{\cancel{e^x}\left(\dfrac{1}{e^x}+1\right)}$ ⚠ $e^{2x}=(e^x)^2$

$= \dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

c) $\dfrac{e^{1+2x}}{1+e^{2x}} = \dfrac{\cancel{e^x}\times e^{1+x}}{\cancel{e^x}\left(\dfrac{1}{e^x}+e^x\right)}$

$= \dfrac{e^{1+x}}{e^{-x}+e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

d) $\dfrac{1}{1}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1\times(1+e^{-x})-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$= \dfrac{1+\cancel{e^{-x}}-\cancel{e^{-x}}}{\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{e^x}} =$

$= \dfrac{1}{\dfrac{1\times e^x+1}{e^x}}$

$= 1\times\dfrac{e^x}{1+e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice C10

* $A(x) = e^{-4x}+3 \quad (x \in \mathbb{R})$

$\left.\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-4x}>0 \\ 3>0\end{array}\right\}$ par somme $\forall x \in \mathbb{R}\ A(x)>0$

* $C(x) = -2e^x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$

$\left.\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{R}\ e^x>0 \text{ donc } -2e^x<0 \\ -1<0\end{array}\right\}$ par somme $\forall x \in \mathbb{R}\ C(x)<0$

* $E(x) = \underbrace{(1+3x)}_{\text{Signe expression type affine}}\ \underbrace{e^{-x}}\quad (x \in \mathbb{R})$

$\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x}>0$

Tableau de signes:

x	$-\infty$		$-1/3$		$+\infty$
$1+3x$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$E(x)$		$-$	0	$+$	

* $B(x) = -3e^{-3x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$

$\left.\begin{array}{l}\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-3x-1}>0 \\ -3<0\end{array}\right\}$ par produit $\forall x \in \mathbb{R},\ B(x)<0$

On aurait pu dresser un tableau de signes.

x	$-\infty$	$+\infty$
-3	$-$	
e^{-3x-1}	$+$	
$B(x)$	$-$	

* $D(x) = 2e^x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$

On cherche x tel que $D(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2e^x-2\geq 0$
$\Leftrightarrow 2e^x \geq 2$
$\Leftrightarrow e^x \geq \frac{2}{2}$
$\Leftrightarrow e^x \geq 1$
$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$
$\Leftrightarrow x \geq 0$

Tableau de signes

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$D(x)$		$-$	0	$+$	

* $F(x) = e^x - 3x e^x \quad (x \in \mathbb{R})$

$F(x) = e^x(1-3x)$

Tableau de signes:

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$1-3x$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$+$	0	$-$	

* $H(x) = x^2 e^x - e^{x+2} \quad (x \in \mathbb{R})$

$H(x) = e^x(x^2 - e^2)$

$H(x) = e^x (x-e)(x+e)$

Tableau de signes:

x	$-\infty$		$-e$		$+e$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
x^2-e^2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$H(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice C11

1. a) $e^{2x-1} = 0$ n'a pas solⁿ car $\forall x \in \mathbb{R}; e^{2x-1} > 0$

c) $e^{x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-2} = -1$. n'a pas de solⁿ car $\forall x \in \mathbb{R}; e^{x-2} > 0$

d) $e^{x-3} = -1$ n'a pas de solution car $\forall x \in \mathbb{R}; e^{x-3} > 0$

Propriété: $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

2 a) $e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x$
$\Leftrightarrow 2x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

b) $e^{4-x} = 1 \Leftrightarrow e^{4-x} = e^0$
$\Leftrightarrow 4 - x = 0$
$\Leftrightarrow 4 = x$

$S = \{4\}$

c) $e^{x^2} = e \Leftrightarrow e^{x^2} = e^1$
$\Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

$S = \{-1; 1\}$.

d) $e^{x^2-1} = e^{-2x}$ (E)

(E) $\Leftrightarrow x^2 - 1 = -2x$

(E) $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$

$\Delta > 0$ il y a deux solⁿ

$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{4 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$

$x_2 = \ldots = -1 + \sqrt{2}$.

* $G(x) = e^{2x} - e^x \quad (x \in \mathbb{R})$

$G(x) = (e^x)^2 - e^x$

$G(x) = \underbrace{e^x}_{ok!}(\underbrace{e^x - 1}_{?})$.

on cherche x tel que: $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$
$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$
$\Leftrightarrow x \geq 0$

Tableau de signes:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$(e^x - 1)$		$-$	0	$+$	
$G(x)$		$-$	0	$+$	

* $I(x) = \frac{e^{-x} - x e^{-x}}{1 + e^x} \quad (x \in \mathbb{R})$

$I(x) = \frac{e^{-x}(1-x)}{1+e^x}$

Tableau de signes

x	$-\infty$		1		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$	
$1+e^x$		$+$		$+$	
$I(x)$		$+$	0	$-$	

e) $e^{4x+3} = \frac{e^{-x}}{e} \Leftrightarrow e^{4x+3} = e^{-x-1}$
$\Leftrightarrow 4x + 3 = -x - 1$
$\Leftrightarrow 5x = -4$
$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$

$S = \{-\frac{4}{5}\}$

f) $e^{-5x+1} = e^1 \times e^{2x+3} \Leftrightarrow e^{-5x+1} = e^{2x+4}$
$\Leftrightarrow -5x + 1 = 2x + 4$
$\Leftrightarrow -7x = 3$
$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{7}$

$S = \{-\frac{3}{7}\}$.

g) $(e^x - e^2)(e^{-x} + 4) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^2 = 0$ ou $e^{-x} + 4 = 0$

$e^x = e^2$ $\quad$ $e^{-x} = -4$

$x = 2$ $\quad$ impossible car $\forall x \in \mathbb{R}\ e^{-x} > 0$

$S = \{2\}$.

$$S=\{-1-\sqrt{2};\,1+\sqrt{2}\}.$$

h) $e^{-5x+1}-e^{2x-1}\leq 0 \Leftrightarrow e^{-5x+1}\leq e^{2x-1}$

$\Leftrightarrow -5x+1\leq 2x-1$ — propriété $e^a\leq e^b \Leftrightarrow a\leq b$

$\Leftrightarrow -7x\leq -2$

$\Leftrightarrow x\geq \frac{-2}{-7}$

$\Leftrightarrow x\geq \frac{2}{7}$ $\quad S=[\frac{2}{7};+\infty[$

i) $e^{1-x}>e^4 \Leftrightarrow 1-x>4$

$\Leftrightarrow -x>3$

$\Leftrightarrow x<-3$ $\quad S=]-\infty;-3[.$

3. $X^2+4X-5=0$

On a : $\Delta = 4^2-4\times 1\times(-5)=16+20=36>0$

Il y a deux sol^{ns}.

$X_1=\frac{-4-\sqrt{36}}{2\times 1}=\frac{-4-6}{2}=-5$

$X_2=\frac{-4+\sqrt{36}}{2\times 1}=\frac{-4+6}{2}=1$ $\quad S=\{-5;1\}$

Exercice C12.

1. $f(0)=\underline{3}.$

$f'(0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{+2}{+1}=2$ — coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

2. $f(x)=1+\underbrace{(ax+b)e^x}$ $x\in\mathbb{R}$.

a) $f'(x)=(1)'+(ax+b)'(e^x)+(ax+b)(e^x)'$

$=0+ae^x+(ax+b)e^x$

$=e^x(ax+a+b)$ $\quad x\in\mathbb{R}.$

i) $1-e^{x^2-3}\geq 0 \Leftrightarrow 1\geq e^{x^2-3}$

$\Leftrightarrow e^0\geq e^{x^2-3}$

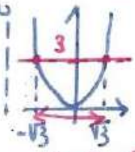
$\Leftrightarrow 0\geq x^2-3$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2-3\leq 0}$ — OU ... $\Leftrightarrow x^2-3\leq 0$

Type ax^2+bx+c !!! — $\Leftrightarrow x^2\leq 3$

$\Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\leq 0$ — Fonction carré

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		$+$	0	$-$	0	$+$	



$S=[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ $\quad S=[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$

j) $e^{x+1}\geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{x+1}\geq e^{-1}$

$\Leftrightarrow x+1\geq -1$

$\Leftrightarrow x\geq -2$ $\quad S=[-2;+\infty[.$

$e^{2x}+4e^x=5 \Leftrightarrow \underset{\sim}{e^{2x}}+4e^x-5=0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2+4e^x-5=0$

Cette équation est de la forme $X^2+4X-5=0$

$\Leftrightarrow e^x=-5$ ou $e^x=1$

impossible car $\forall x\in\mathbb{R}\ e^x>0$ $\quad e^x=e^0$, $x=0$

$S=\{0\}.$

b) $f(0)=3 \Leftrightarrow 1+(a\times 0+b)\underbrace{e^0}_{1}=3$

$\Leftrightarrow 1+b=3$

$\Leftrightarrow b=2.$

$f'(0)=2 \Leftrightarrow \underbrace{e^0}_{1}(a\times 0+a+b)=2$

$\Leftrightarrow a+b=2$ or $b=2.$

$\Leftrightarrow a+2=2$

$\Leftrightarrow a=0$

Ainsi $f(x)=1+2e^x$ $\forall x\in\mathbb{R}.$

Exercice C13.

a) $f(x) = 3e^{2x} - 5e^{x} + e$ avec $x \in \mathbb{R}$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$)
- $f'(x) = 3\times(e^{2x})' - 5(e^{x})' + (e)'$
  $= 3\times 2e^{2x} - 5e^{x} + 0$

$f'(x) = 6e^{2x} - 5e^{x}$

$f'(x) = e^{x}(6e^{x} - 5)$ $x \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = (e^{x}+1)(e^{x}-1)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = (e^{x}+1)'(e^{x}-1) + (e^{x}+1)(e^{x}-1)'$
  $= e^{x}(e^{x}-1) + (e^{x}+1)e^{x}$
  $= e^{x}((e^{x}-1) + (e^{x}+1))$

$f'(x) = e^{x}\times(2e^{x}) = 2e^{2x}$ $x \in \mathbb{R}$.

e) $f(x) = e^{\frac{1}{3}x+5}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x+5}$ $x \in \mathbb{R}$. $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$

f) $f(x) = \frac{x+1}{e^{x}}$

- f est définie si $e^{x} \neq 0$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$
  Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = \frac{(x+1)'(e^{x}) - (x+1)(e^{x})'}{(e^{x})^2}$
  $= \frac{1\times e^{x} - (x+1)\times e^{x}}{(e^{x})^2} = \frac{\cancel{e^{x}}(1-(x+1))}{\cancel{e^{x}}\times e^{x}}$

$f'(x) = \frac{-x}{e^{x}}$ $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{e^{x}+5}{x}$

- f est définie si $x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
- f est dérivable sur "$\mathbb{R}^*$" comme quotient de fonctions dérivables sur "$\mathbb{R}^*$")
- $f'(x) = \frac{(e^{x}+5)'\times(x) - (e^{x}+5)(x)'}{x^2}$
  $= \frac{e^{x}\times x - (e^{x}+5)\times 1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{e^{x}(x-1) - 5}{x^2}$ avec $x \neq 0$

d) $f(x) = \frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$

- f est définie si $e^{x} - 1 \neq 0$
  $e^{x} \neq 1$
  $e^{x} \neq e^{0}$
  $x \neq 0$ Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
- f est dérivable sur "$\mathbb{R}^*$" comme quotient de fonctions dérivables sur "$\mathbb{R}^*$"
- $f'(x) = \frac{(e^{x}+1)'(e^{x}-1) - (e^{x}+1)(e^{x}-1)'}{(e^{x}-1)^2}$

$f'(x) = \frac{(e^{x})(e^{x}-1) - (e^{x}+1)\times(e^{x})}{(e^{x}-1)^2}$

$f'(x) = \frac{e^{x}((e^{x}-1) - (e^{x}+1))}{(e^{x}-1)^2}$

$f'(x) = \frac{-2e^{x}}{(e^{x}-1)^2}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

g) $f(x) = \frac{2}{e^{-x}} = 2e^{x}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto e^{x}$ dér. sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = (2e^{x})' = 2e^{x}$ $x \in \mathbb{R}$.

h) $f(x) = e^{3-2x}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$

$f'(x) = (e^{3-2x})' = -2e^{3-2x}$ $x \in \mathbb{R}$.

Exercice C14

1. $f(x) = 2e^{-x} - 2x - 7 \quad x \in \mathbb{R}$.

a) • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

• $f'(x) = 2\times(-e^{-x}) - 2 = \underline{-2(e^{-x}+1)\ x\in\mathbb{R}}$

• Tableau de variations

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
-2	$-$
$e^{-x}+1$	$+$ (somme nombres positifs)
signe $f'(x)$	$-$
Var. f	↘

b) (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = -2(\underbrace{e^{-0}}_{1}+1) = -4$

$\underline{y = -4x - 5}$

$f(0) = 2e^{-0} - 2\times 0 - 7 = 2 - 7 = -5$

3. $f(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.

a) f est définie si $e^{x} - e^{-x} \neq 0$

$e^{x} \neq e^{-x}$

$x \neq -x$

$2x \neq 0$

$x \neq 0$ $\quad$ Donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

b) • f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$)

• $f'(x) = \dfrac{(e^{x}+e^{-x})'(e^{x}-e^{-x}) - (e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})'}{(e^{x}-e^{-x})^2}$

$f'(x) = \dfrac{(e^{x}-e^{-x})(e^{x}-e^{-x}) - (e^{x}+e^{-x})(e^{x}-(-e^{-x}))}{(e^{x}-e^{-x})^2}$

$(a-b)^2 = \dots$ $\qquad$ $\to (a+b)^2$

$f'(x) = \dfrac{(e^{x}-e^{-x})^2 - (e^{x}+e^{-x})^2}{(e^{x}-e^{-x})^2}$ $\quad$ soit on développe

soit on factorise on reconnait $A^2 - B^2$

$f'(x) = \dfrac{\left((e^{x}-e^{-x})-(e^{x}+e^{-x})\right)\left((e^{x}-e^{-x})+(e^{x}+e^{-x})\right)}{(e^{x}-e^{-x})^2}$

$f'(x) = \dfrac{(\cancel{e^{x}} - e^{-x} \dots - e^{-x})(e^{x} - \cancel{e^{-x}} + e^{x} + \cancel{e^{-x}})}{(e^{x}-e^{-x})^2}$

$f'(x) = \dfrac{(-2e^{-x})\times(2e^{x})}{(e^{x}-e^{-x})^2} = \dfrac{-4\overbrace{e^{-x+x}}^{1}}{(e^{x}-e^{-x})^2}\ (x\neq 0)$

c) Tableau de variations :

x	$-\infty$	‖	$+\infty$
-4	$-$	‖	$-$
$(e^{x}-e^{-x})^2$	$+$	‖	$+$
signe $f'(x)$	$-$	‖	$-$
Var. f	↘	‖	↘

2. $f(x) = x^2 e^{1-x} \quad x \in \mathbb{R}$

a) • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

• $f'(x) = (x^2)'\times(e^{1-x}) + (x^2)\times(e^{1-x})'$

$f'(x) = 2x \times e^{1-x} + (x^2)\times(-1\, e^{1-x})$

$f'(x) = e^{1-x}(2x - x^2) = \underline{e^{1-x}\times x(2-x)}$ $\quad$ $x \in \mathbb{R}$

• Tableau de variations.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
e^{1-x}		$+$		$+$		$+$	
$-x^2+2x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Var. f		↘	0	↗	$4e^{-1}$	↘	

$f(0) = 0^2 \times e^{1-0} = 0$

$f(2) = 2^2 e^{1-2} = 4e^{-1}$

b) (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = \underbrace{e^{1-1}}(2\times 1 - 1^2) = 1\times(1) = 1$

$y = 1(x-1)+1$

$y = x - 1 + 1$

$\underline{y = x}$

$f(1) = 1^2 \times \underbrace{e^{1-1}}_{1} = 1.$

Exercice C15.

1. Conjecture : Les tangentes à C_f et C_g aux points d'abscisse 0 sont parallèles.

2. Démontrons la conjecture.

* On a : $f(x) = x\, e^{x}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Ainsi $f'(x) = (x)'(e^{x}) + (x)(e^{x})'$
$f'(x) = 1\times e^{x} + x\, e^{x} = \underline{e^{x}(1+x)\ (x\in\mathbb{R})}$.
Et $f'(0) = \underbrace{e^{0}}_{1}(1+0) = 1\times 1 = \underline{1}$.

* On a : $g(x) = x^2 + e^{x}$ $(x \in \mathbb{R})$
Ainsi $g'(x) = (x^2)' + (e^{x}) = \underline{2x + e^{x}\ (x\in\mathbb{R})}$
Et $g'(0) = 2\times 0 + \underbrace{e^{0}}_{1} = \underline{1}$.

Ainsi $f'(0) = g'(0) = 1$.
Les coefficients directeurs des tangentes à C_f et C_g aux points d'abscisse 0 sont égaux, par conséquent les tangentes sont bien parallèles.

Exercice C16

1. On pose $f(x)=e^x$ ($x\in\mathbb{R}$).

Ainsi $f'(x)=e^x$ ($x\in\mathbb{R}$)

Par conséquent : $T_1 : y=f'(1)(x-1)+f(1)$ avec $f'(1)=e^1=e$

$f(1)=e^1=e$

$y=e(x-1)+e$

$y=ex-\cancel{e}+\cancel{e}$

$y=ex$

Exercice C17.

Partie A : $g(x)=\underbrace{(x-1)e^x}_{\text{produit}}+1 \quad x\in\mathbb{R}$.

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$)

$g'(x)=(x-1)'(e^x)+(x-1)(e^x)'+0$

$g'(x)=1\times e^x+(x-1)\times e^x = e^x(\cancel{1}+x-\cancel{1})$

$g'(x)=x\,e^x \quad x\in\mathbb{R}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
signe $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Var g		↘	0	↗	

$g(0)=(0-1)\times \underbrace{e^0}_{1}+1$
$=-1+1$
$=0$

2. Sur $\mathbb{R}$, g admet un minimum en 0 qui vaut 0, donc $\forall x\in\mathbb{R}$; $g(x)\geq 0$

2 a) $g(x)=e^x-ex$ ($x\in\mathbb{R}$)

• $g'(x)=(e^x)-(ex)'=e^x-e$ ($x\in\mathbb{R}$).

• on cherche x tel que $e^x-e\geq 0$

$e^x\geq e^1$

$x\geq 1$.

• Tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Var g		↘	0	↗	

$g(1)=e^1-e\times 1$
$=e-e=0$

b) Sur $\mathbb{R}$, g admet un minimum en 1 qui vaut 0, donc $\forall x\in\mathbb{R}$; $g(x)\geq 0$

c) Etude du signe de $f(x)-(ex)$

or $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)-(ex)=g(x)$

D'après b) $\forall x\in\mathbb{R}$; $g(x)\geq 0$

$f(x)-(ex)\geq 0$

$f(x)\geq ex$

Donc sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ est au dessus de T_1.

Partie B.

$f(x)=(x-2)e^x+x+1 \quad x\in\mathbb{R}$

1. $f'(x)=(x-2)'(e^x)+(x-2)\times(e^x)'+(x+1)'$

$f'(x)=1\times e^x+(x-2)\times e^x+1$.

$f'(x)=e^x(1+x-2)+1$

$f'(x)=e^x(x-1)+1$

$f'(x)=g(x) \quad x\in\mathbb{R}$.

2. $\forall x\in\mathbb{R}$ $g(x)\geq 0$

$f'(x)\geq 0$

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice C 18

1. a) $\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2\times e^{\frac{x}{2}}\times 1 + 1^2$

$= e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

b) * on cherche l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

On résout : $f(x)=g(x) \Leftrightarrow e^{x} = 2e^{\frac{x}{2}}-1$

$\Leftrightarrow e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - \underbrace{1}_{e^0} = 0$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = e^{0}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 0$

$x = 0$

Ainsi $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont bien un point d'intersection dont l'abscisse est 0.

2. a) $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$

* $h'(x) = 2\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)' - 1 - 0 = 2\times\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right) - 1$

$h'(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1 \quad x \in \mathbb{R}.$

* on cherche x tel que : $e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq 0$

$e^{\frac{x}{2}} \geq e^{0}$

$\frac{x}{2} \geq 0$

$x \geq 0$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

b) Tableau de variations de h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe $h'(x)$		$-$	0	$+$	
Var h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$h(0) = 2e^{\frac{0}{2}} - 0 - 2$
$= 2 - 2 = 0$

Sur $\mathbb{R}$, h admet un minimum en 0, qui vaut 0, donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \geq 0$

$2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geq 0$

$2e^{\frac{x}{2}} - 1 - x - 1 \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x+1$

c) $\forall x \in \mathbb{R};\ 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x+1$ avec $(\Delta) : y = x+1$

Ainsi sur $\mathbb{R}$; $\mathcal{C}$ est au dessus de (Δ).

* On a : $f(x) = e^{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ et $f'(x) = e^{x}$ $(x \in \mathbb{R})$

Ainsi (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = e^{0} = 1$, $f(0) = e^{0} = 1$

$y = 1x + 1$

* On a : $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1 = e^{\frac{1}{2}x} - 1$ $x \in \mathbb{R}$.

et $g'(x) = 2\times\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right) - 0 = e^{\frac{x}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$

Ainsi (T') : $y = g'(0)(x-0) + g(0)$ avec $g'(0) = e^{\frac{0}{2}} = e^{0} = 1$

$y = 1x + 1$

$g(0) = 2e^{\frac{0}{2}} - 1 = 2\times 1 - 1 = 1$

Ainsi $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admet une tangente commune au point d'abscisse 0 dont l'équation est $y = x+1$.

3. Etude du signe de $f(x) - g(x)$:

$f(x) - g(x) = e^{x} - \left(2e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$

$= e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}} + 1$

$= \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$ d'après 1.a).

Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-g(x) = \left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$		$+$	0	$+$	

Ainsi, $f(x) - g(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

$f(x) > g(x)$.

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Exercice C 19

$T(t) = 55\, e^{-0{,}2t} + 45 \quad t \in [0\,;+\infty[$.

1. $T(0) = 55\, \underbrace{e^{-0{,}2\times 0}}_{1} + 45 = 55 + 45 = 100$

La température de la casserole au moment où on la plonge dans l'eau est de 100 °C.

2. La vitesse de refroidissement est :

$T'(t) = 55 \times (-0{,}2\, e^{-0{,}2t}) + 0$

$T'(t) = 0{,}2\,(-55\, e^{-0{,}2t})$ or $T(t) = 55e^{-0{,}2t} + 45$, $-55e^{-0{,}2t} = 45 - T(t)$

$T'(t) = 0{,}2\,(45 - T(t)) \quad (t \geq 0)$

Ainsi $T'(t)$ la vitesse de refroidissement est bien proportionnelle à l'écart de température de l'eau de l'évier et de la casserole et le coefficient de proportionalité est 0,2.

3. $5 \text{ min} = 5 \times 60 = 300$ s.

Ainsi $T(300) = 55\, e^{-0{,}2\times 300} + 45$

$= 55\, e^{-60} + 45 \simeq 45$

Au bout de 5 min la température de la casserole est environ 45 °C (température de l'eau de l'évier).

Exercice C 20.

1. $f(t) = 6 \times \dfrac{e^{0{,}1t} - 1}{e^{0{,}1t} + 1} \quad (t \geq 0)$

a) On a : $f(0) = 6 \times \dfrac{e^{0{,}1\times 0} - 1}{e^{0{,}1\times 0} + 1} = 6 \times \dfrac{\overbrace{1-1}^{0}}{1+1} = 0$

Le caillou est bien lancé sans vitesse initiale.

b) * f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ (quotient....)

$f'(t) = 6 \times \dfrac{(e^{0{,}1t} - 1)'(e^{0{,}1t} + 1) - (e^{0{,}1t} - 1)(e^{0{,}1t} + 1)'}{(e^{0{,}1t} + 1)^2}$

$f'(t) = 6 \times \dfrac{(0{,}1 e^{0{,}1t})(e^{0{,}1t} + 1) - (e^{0{,}1t} - 1) \times (0{,}1 e^{0{,}1t})}{(e^{0{,}1t} + 1)^2}$

$f'(t) = 6 \times \dfrac{0{,}1\, e^{0{,}1t}\,((\cancel{e^{0{,}1t}} + 1) - (\cancel{e^{0{,}1t}} - 1))}{(e^{0{,}1t} + 1)^2}$

$f'(t) = \dfrac{6 \times 0{,}1\, e^{0{,}1t} \times 2}{(e^{0{,}1t} + 1)^2} = \dfrac{1{,}2\, e^{0{,}1t}}{(e^{0{,}1t} + 1)^2}$

$(t \in \mathbb{R}^+)$

* Tableau de variations.

t	0 $+\infty$
$1{,}2e^{0{,}1t}$	+
$(e^{0{,}1t}+1)^2$	+
signe $f'(t)$	+
Var f.	0 ↗

c) En utilisant le tableau de valeur de la calculatrice, on peut conjecturer : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 6$

Ainsi, la vitesse du caillou augmente et va se stabiliser autour de 6 m/s et par conséquent ne dépassera pas 10 m/s.

2. $D(t) = \dfrac{15}{1 + 20e^{-0{,}5t}} \quad t \in [0, +\infty[$

Etudions le variations de D sur $[0\,;+\infty[$.

$D(t) = 15 \times \dfrac{1}{1+20\, e^{-0{,}5t}}$ forme $\dfrac{1}{v}$

$D'(t) = 15 \times \left(-\dfrac{(1+20\, e^{-0{,}5t})'}{(1+20\, e^{-0{,}5t})^2}\right) \quad \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

$D'(t) = 15 \times \left(-\dfrac{20\times(-0{,}5 e^{-0{,}5t})}{(1+20 e^{-0{,}5t})^2}\right)$

$D'(t) = \dfrac{150\, e^{-0{,}5t}}{(1+20e^{-0{,}5t})^2} \quad t \in [0\,;+\infty[$.

Tableau de variation :

t	0 $+\infty$
$150e^{-0{,}5t}$	+
$(1+20e^{-0{,}5t})^2$	+
Signe $D'(t)$	+
Var D.	$\frac{15}{21}$ ↗

$D(0) = \dfrac{15}{1+20\underbrace{e^{-0{,}5\times 0}}_{1}} = \dfrac{15}{21} \simeq 0{,}7$

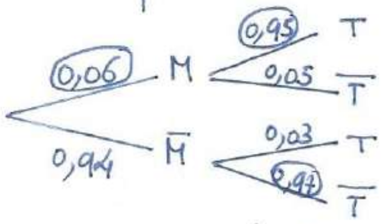
A l'aide de la calculatrice, on conjecture $\lim\limits_{t\to\infty} D(t) = 15$.

Ainsi, le diamètre de la tige croît et va se stabiliser autour de 15.

Autrement dit, le diamètre de la tige ne dépassera pas 15 cm.

Exercice D1

1. <u>Conseil</u> : Dessiner l'arbe pondéré même si ce n'est pas demandé !



P

- $P(M \cap T) = 0{,}06 \times 0{,}95 = \underline{0{,}057}$

La probabilité d'être malade et d'avoir un test positif est de 5,7 %.

- $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0{,}94 \times 0{,}97 = \underline{0{,}9118}$

La probabilité de ne pas être malade et avoir un test négatif est de 91,18 %

- $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}94 \times 0{,}03 = \underline{0{,}0282}$

La probabilité de ne pas être malade et avoir un test positif est de 2,82 %

2. On cherche $P(T)$.

M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})$$
$$= 0{,}057 + 0{,}0282$$
$$P(T) = 0{,}0852$$

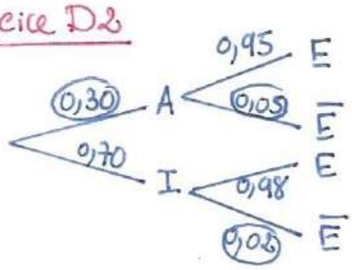
La probabilité que le test soit positif est de 8,52 %.

3. $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0{,}057}{0{,}0852} \simeq \underline{0{,}669}$

La probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade est d'environ 66,9 %

Exercice D2

1.



2. $P(A \cap \overline{E}) = 0{,}3 \times 0{,}05 = \underline{0{,}015}$

La probabilité qu'une réservation ait été faite en agence et que le client ne se soit pas présenté est de 1,5 %.

4. On cherche $P_{\overline{E}}(A)$

$P_{\overline{E}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \dfrac{0{,}015}{0{,}029} \simeq \underline{0{,}5172}$

La probabilité que la réservation ait été faite en agence sachant que le client ne s'est pas présenté à l'embarquement est d'environ 51,72 %.

3. On cherche $P(\overline{E})$.

A et I forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales,

$$P(\overline{E}) = P(\overline{E} \cap I) + P(\overline{E} \cap A)$$
$$= 0{,}7 \times 0{,}02 + 0{,}015$$
$$= 0{,}014 + 0{,}015$$
$$P(\overline{E}) = 0{,}029.$$

5. On cherche $P_E(A)$.

$P_E(A) = \dfrac{P(A \cap E)}{P(E)}$ or $P(E) = 1 - P(\overline{E})$
$= 1 - 0{,}029$
$= 0{,}971$

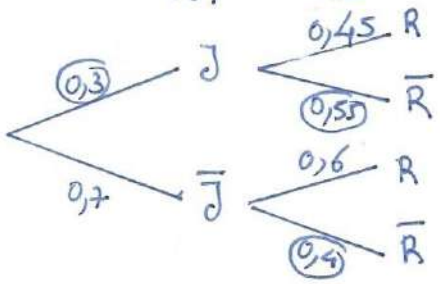
$$= \frac{0{,}3 \times 0{,}95}{0{,}971} = \frac{0{,}285}{0{,}971}.$$
$$\simeq \underline{0{,}2935}$$

La probabilité qu'une personne se présentant à l'embarquement soit passée par une agence est d'environ 29,35 %.

Exercice D3

1. $P_J(\overline{R}) = \frac{P(J\cap\overline{R})}{P(J)} = \frac{0,165}{0,3} = 0,55$ énoncé

2.



3 a) $P(J\cap R) = 0,3\times 0,45 = \underline{0,135}$

La probabilité que la personne rencontrée lise chaque jour la presse régionale est 13,5%

b) $P(\overline{J}\cap\overline{R}) = 0,7\times 0,4 = \underline{0,28}$

La probabilité que la personne rencontrée soit un lecteur occasionnel et lise la presse nationale est de 28%

c) On cherche $P(\overline{R})$

J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$P(\overline{R}) = P(\overline{R}\cap\overline{J}) + P(\overline{R}\cap J)$

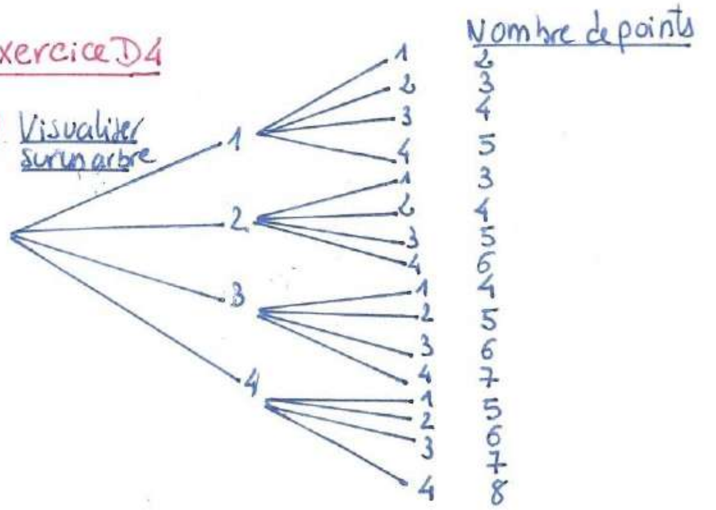
$= 0,28 + 0,165$ énoncé

$= \underline{0,445}$

La probabilité que la personne lise la presse nationale est de 44,5%.

Exercice D4

1) Visualiser sur un arbre



Loi de probabilité

Valeurs X : x_i	2	3	4	5	6	7	8
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. $E(X) = \sum_{i=1}^{7} p_i \times x_i$

$= 2\times\frac{1}{16} + 3\times\frac{2}{16} + 4\times\frac{3}{16} + 5\times\frac{4}{16}$
$+ 6\times\frac{3}{16} + 7\times\frac{2}{16} + 8\times\frac{1}{16}$

$E(X) = \frac{80}{16} = 5.$

Sur un très grand nombre de tirage, on peut espérer gagner en moyenne 5 points.

3. a) $P(X>5) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8)$

$= \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

b) $P(X\leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

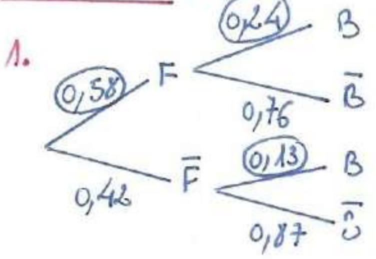
$= \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

ou $P(X\leq 5) = 1 - P(X>5)$

$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Exercice D5

1.



5a) Montant achats:

$40 + 25 = 65$ €

$40 + 0 = 40$ €

$60 + 25 = 85$ €

$60 + 0 = 60$ €

2. $P(F \cap B) = 0,58 \times 0,24 = \underline{0,1392}$.

3. F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales:

$P(B) = P(B \cap \overline{F}) + P(B \cap F)$

$P(B) = 0,42 \times 0,13 + 0,1392 = \underline{0,1938}$

La probabilité que le client achète le parfum "Bois d'ébène" est de 19,38 %.

4. $P_B(F) = \dfrac{P(B \cap F)}{P(B)} = \dfrac{0,1392}{0,1938} \simeq \underline{0,718}$

La probabilité qu'un client achète un flacon de 30 mL de "Fleur Rose" sachant qu'il a acheté un flacon de "Bois d'ébène" est d'environ 71,8 %.

5.a) Loi de probabilité de X.

Valeurs de X : x_i	40	60	65	85
$p_i = P(X = x_i)$	0,4408	0,3654	0,1392	0,0546

- $P(X = 40) = P(F \cap \overline{B}) = 0,58 \times 0,76 = \underline{0,4408}$
- $P(X = 60) = P(\overline{F} \cap \overline{B}) = 0,42 \times 0,87 = \underline{0,3654}$
- $P(X = 85) = P(\overline{F} \cap B) = 0,42 \times 0,13 = \underline{0,0546}$

ou $P(X = 85) = 1 - (0,4408 + 0,3654 + 0,1392)$
$= \underline{0,0546}$

b) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i \times x_i$

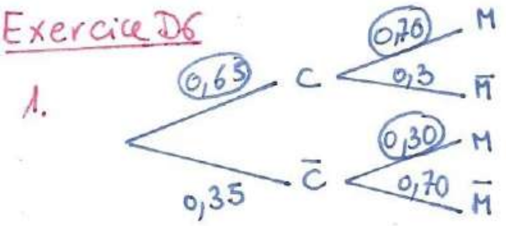
$= 40 \times 0,4408 + 60 \times 0,3654 + 65 \times 0,3654 + 85 \times 0,0546$

$E(X) = \underline{53,245}$.

Pour un grand nombre de clients, en moyenne un client dépense 53,245 € par achat.

Exercice D6

1.



5a) Grille tarifs:

$800 + 50 = 850$ €

$800 + 0 = 800$ €

$650 + 50 = 700$ €

$650 + 0 = 650$ €

2. $P(C \cap M) = 0,65 \times 0,7 = \underline{0,455}$

3. C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totale

$P(M) = P(M \cap \overline{C}) + P(M \cap C)$

$= 0,35 \times 0,30 + 0,455$

$= 0,105 + 0,455$

$P(M) = \underline{0,56}$

4. $P_M(C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(M)} = \dfrac{0,455}{0,56} = \underline{0,8125}$

La probabilité que le client ait choisi la formule "pension complète" sachant qu'il a réservé l'option ménage est de 81,25 %

5.a) $P(X = 850) = P(C \cap M) = \underline{0,455}$ d'après la

b) Loi de probabilité de X.

Valeurs de X : x_i	650	700	800	850
$p_i = P(X = x_i)$	$0,35 \times 0,7$ 0,245	$0,35 \times 0,3$ 0,105	$0,65 \times 0,3$ 0,195	0,455

c) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i$

$= 650 \times 0,245 + 700 \times 0,105 + 800 \times 0,195 + 850 \times 0,455$

$E(X) = \underline{775,5}$

Pour un grand nombre de clients, le montant moyen payé par client est 775,50 €.

Exercice D7

1.

	Chaud. à cham.	Chaud. à vent.	Total
Chaud. défect	9	36	45
Chaud. non déf.	891	564	1455
Total	900	600	1500

$\left(\frac{1}{100} \times 900 = 9\right.$

$\left.\frac{6}{100} \times 600 = 36\right)$

Détails Pas demandés

3. $P(D) = \frac{45}{1500} = 0{,}03$ d'après 1.

OU C et D forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(D \cap V) + P(D \cap C)$
$= 0{,}4 \times 0{,}06 + 0{,}6 \times 0{,}01$
$= 0{,}03.$

La probabilité que le numéro de série soit celui d'une chaudière défectueuse est de 3%.

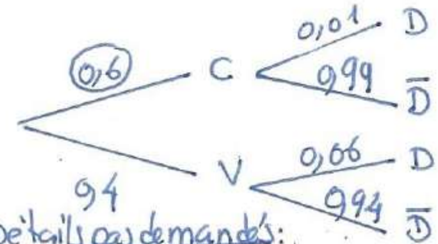
4. $P_D(V) = \frac{P(V \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}06}{0{,}03} = 0{,}8$

OU $P_D(V) = \frac{36}{45}$ d'après 1.

$P_D(V) = 0{,}8$

Parmi les chaudières défectueuses, la probabilité d'avoir une chaudière à ventouse est de 80%.

2.



Détails pas demandés :

$\left(P_C(D) = \frac{9}{900} = 0{,}01\right.$

$\left.P_V(D) = \frac{36}{600} = 0{,}06\right)$ ← en utilisant le tableau

(OU $P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \left(\frac{9}{1500}\right) : \left(\frac{900}{1500}\right) = \frac{9}{\cancel{1500}} \times \frac{\cancel{1500}}{900}$

$= 0{,}01.$

En utilisant la formule des probabilités conditionnelles)

5. Calcul de $P(V)$

D'après 1. $P(V) = \frac{600}{1500} = 0{,}4$

Ainsi $P_D(V) \neq P(V)$

Donc les événements D et V ne sont pas indépendants.

OU $P(V) \times P(D) = 0{,}03 \times 0{,}4 = 0{,}012$

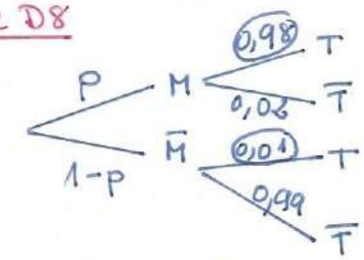
$P(V \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}06 = 0{,}024$ } *

* Donc $P(V) \times P(D) \neq P(V \cap D)$

Ainsi les événements D et V ne sont pas indépendants.

Exercice D8

1. a)



b) . $P(M \cap T) = p \times 0,98$

. $P(\overline{M} \cap T) = (1-p) \times 0,01$

. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers
D'après la formule des probabilités totales:

$P(T) = P(\overline{M} \cap T) + P(M \cap T)$

$= 0,01(1-p) + 0,98p$

$= 0,01 - 0,01p + 0,98p$

$P(T) = 0,97p + 0,01.$

3. . Test fiable $\Leftrightarrow P_T(M) > 0,95.$

$\Leftrightarrow f(p) > 0,95.$ avec $p \in [0;1]$

. On cherche $p \in [0;1]$ tel que $f(p) > 0,95$

$f(p) > 0,95 \Leftrightarrow \frac{98p}{97p+1} > 0,95.$ avec $p \in [0;1]$

$\Leftrightarrow \frac{98p}{97p+1} - \frac{0,95(97p+1)}{97p+1} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{98p - 92,15p - 0,95}{97p+1} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{5,85p - 0,95}{97p+1} > 0.$

on cherche p tel que: $5,85p - 0,95 = 0$

$p = \frac{0,95}{5,85} = \frac{95}{585} = \frac{19}{117}$

$\simeq 0,1624$

2 a). $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,98p}{0,97p + 0,01}$

$P_T(M) = \frac{0,98p \times 100}{(0,97p + 0,01) \times 100}$

$P_T(M) = \frac{98p}{97p+1}.$ avec $p \in [0;1]$

b) on pose $f(p) = \frac{98p}{97p+1}$ $p \in [0;1]$.

f est dérivable sur $[0;1]$ (quotient de fonctions dérivables sur $[0;1]$).

$f'(p) = \frac{(98p)'(97p+1) - 98p(97p+1)'}{(97p+1)^2}$

$f'(p) = \frac{98(97p+1) - 98p(97)}{(97p+1)^2}$

$f'(p) = \frac{\cancel{98 \times 97p} + 98 - \cancel{98 \times 97p}}{(97p+1)^2}$

$f'(p) = \frac{98}{(97p+1)^2}$ $p \in [0;1]$

Tableau de variations

p	0		1
98		+	
$(97p+1)^2$		+	
signe $f'(p)$		+	
Var. de f	0	↗	1

$f(0) = \frac{98 \times 0}{97 \times 0 + 1} = 0$

$f(1) = \frac{98 \times 1}{97 \times 1 + 1} = 1$

. Tableau de signes:

p	0		$19/117 \simeq 0,1624$		1
$5,85p - 0,95$		−	0	+	
$97p+1$		+		+	
$\frac{5,85 - 0,95}{97p+1}$		−	0	+	

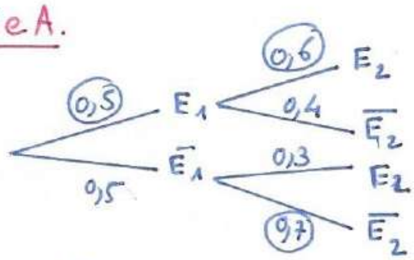
On en déduit que: $f(p) > 0,95$ pour $p \in]\frac{19}{117}; 1]$

Ainsi le test est fiable si plus d'environ 16,24% de la population cible est atteinte par le virus.

Exercice D9

Partie A.

1.



2. E_1 et $\overline{E_1}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(E_2)=P(\overline{E_1}\cap E_2)+P(\overline{E_1}\cap E_2)$$
$$=0,5\times 0,3+0,5\times 0,6$$
$$=\underline{0,45}=\frac{45}{100}=\frac{9\times 5}{20\times 5}=\frac{9}{20}$$

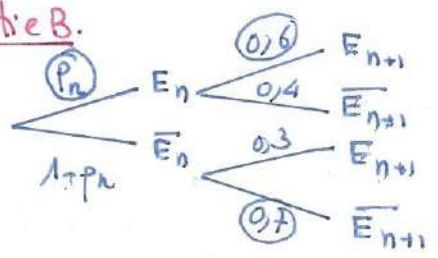
La probabilité que le vélo soit ramené sur le site A la deuxième journée est 0,45 soit $\frac{9}{20}$

3. $P_{E_2}(\overline{E_1})=\dfrac{P(E_2\cap\overline{E_1})}{P(E_2)}=\dfrac{0,5\times 0,3}{0,45}=\dfrac{0,15}{0,45}=\dfrac{1}{3}\approx 0,33$

La probabilité que le vélo se soit trouvé sur le site B la veille est de $\frac{1}{3}$ soit environ 33

Partie B.

1.



E_n et $\overline{E_n}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$\underbrace{P(E_{n+1})}=P(\overline{E_n}\cap E_{n+1})+P(E_n\cap E_{n+1})$$
$$p_{n+1}=(1-p_n)\times 0,3+p_n\times 0,6$$
$$p_{n+1}=0,3-0,3p_n+0,6p_n$$
$$p_{n+1}=0,3p_n+0,3.\ \forall n\in\mathbb{N}^* \text{ avec } p_1=0,5$$

2. $u_n=p_n-\frac{3}{7}$ $n\geq 1$.

On a: $u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{3}{7}$

$$u_{n+1}=0,3+0,3p_n-\frac{3}{7}$$
$$u_{n+1}=0,3p_n+\frac{3\times 7}{10\times 7}-\frac{3\times 10}{7\times 10}$$
$$u_{n+1}=\frac{3}{10}p_n-\frac{9}{70}$$
$$u_{n+1}=\frac{3}{10}\left(p_n-\frac{\frac{9}{70}}{\frac{3}{10}}\right)$$
$$u_{n+1}=0,3\left(p_n-\frac{\cancel{9}^{3}}{7\times\cancel{10}}\times\frac{\cancel{10}}{\cancel{3}}\right)$$
$$u_{n+1}=0,3\left(p_n-\frac{3}{7}\right)$$
$$u_{n+1}=0,3u_n.\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Ainsi (u_n) est une suite géométrique de raison $q=0,3$ et de 1er terme $u_1=p_1-\frac{3}{7}$

$u_1=p_1-\frac{3}{7}=\frac{9}{20}-\frac{3}{7}=\frac{3}{140}$ $=\frac{9\times 7}{20\times 7}-\frac{3\times 20}{7\times 20}$

3.a) $\forall n\geq 1$ $u_n=u_1\times q^{n-1}$

$$u_n=\frac{3}{140}\times 0,3^{n-1}.$$

b) $\forall n\geq 1$: $u_n=p_n-\frac{3}{7}$

$$p_n=u_n+\frac{3}{7}$$
$$p_n=\frac{3}{140}\times\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{3}{7}.$$

c) Conjecture : $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n\simeq 0,4286$

Au bout d'un grand nombre de jours, soit à long terme, la | est d'environ 43%.