TRAVAIL DE VACANCES MATHS - LIAISON– 1ère à Tle STMG

A lire avant de commencer…

1) Le livret est constitué :

- De quelques résultats de cours à connaître (bases de collège et de seconde), avec des liens de vidéos.
- D'exercices pour vous entrainer ; une correction partielle est disponible en annexe : en italique, quelques exercices moins prioritaires (bases déjà acquises par la plupart d'entre vous)

2) Notions à maîtriser pour l'entrée en terminale :

- **Thème 1** (rappels de collège et seconde) : **A- Calcul numérique et littéral** (uniquement si besoin)
  B- Équations et inéquations, tableau de signe
- **Thème 2 : Fonctions** **A- Bases de troisième et seconde, fonctions de référence**
  B- Dérivation
- **Thème 3 : Suites**
- **Thème 4 : Pourcentages et probabilités**

3) Conseils :

- Etablir un planning de révision : revoir rapidement le cours en début de vacances pour commencer à le ré-ancrer dans votre mémoire, puis travailler de façon régulière sur les deux ou trois dernières semaines d'août, en faisant des séances de 0h405 à 1h (au moins 3 ou 4 fois par semaine) et en alternant les thèmes (attention, le thème 1 doit être traité en totalité avant les exercices 4 à 7 du thème 2).
- Faire ces exercices **sur cahier ou feuilles** ; penser à **rédiger** et à noter les éventuelles questions à poser à la rentrer à votre professeur.
- Ne pas consulter le corrigé sans voir cherché les exercices, sans avoir repris vos cahiers de l'année pour revoir le cours, les méthodes…. Ne pas attendre le dernier moment.
- Ce travail est vivement conseillé, pour démarrer sereinement l'année. Vous pouvez garder le livret en cours d'année pour avoir les rappels de cours

4) Progression suggérée (au rythme que vous préférez) :

Si vous vous sentez particulièrement en difficulté, commencez par : J0 : Thème 1A - exercices 1-2 (facultatif). Puis :

J1 : Thème 1 – exercice 3 ; thème 4 – exercice 1 *(conseil : le partager en deux, finir J4)* (p. 2 et p.10) J2 : thème 1 – exercice 4 ; thème 2 – exercice 1 ; thème 3 – exercice 1 (p. 2 - 6 - 8) J3 : thème 1 – exercice 5 ; thème 2 – exercice 2 ; thème 4 –exercice 2 ; (p. 3 - 6 - 11) J4 : thème 2 – exercice 3 ; thème 3 – exercice 2 (p. 6 et p.8) J5 : thème 1 – exercice 6 ; thème 4 – exercice 3 (p. 3-12) J6 : thème 1 –exercice 7 ; thème 3 – exercice 3 (p. 3-9) J7 : thème 2 – exercice 4 ; thème 4 – exercice 4 (p. 6 - 12) J8 : thème 2 –exercice 5 ; thème 3 – exercice 4 (p. 7-9) J9 : thème 2 – exercice 6 ; thème 4 - exercice 5 (p. 7-13) J10 : thème 3 - exercice 5 ; thème 4 - exercice 6 (p. 9-3) J11 : thème 2 – exercice 7 ; (p.7) J12 : thème 4 - exercice 7 (facultatif) (p.13)	J1 : Thème 1 – exercice 3 ; thème 4 – exercice 1 ; thème 2 – exercice 1 (p. 2 – 6 -10) J2 : thème 1 – exercice 4 ; thème 3 – exercice 1 ;thème 4 –exercice 2 (p. 2 – 8 – 11) J3 : thème 1 – exercice 5 ; thème 2 – exercice 2 ; ; thème 3 – exercice 2 (p. 3 - 6 - 8) J4 : thème 2 – exercice 3 ; thème 1 – exercice 6 ; thème 4 – exercice 3 (p. 3-6-12) J5 : thème 1 –exercice 7 ; thème 3 – exercice 3 ; thème 4 – exercice 4 (p. 3-9-12) J6 : thème 2 – exercice 4 ; thème 3 – exercice 4 (p. 6 -9) J7 : thème 2 –exercice 5 ; thème 4 - exercice 5 (p. 7-13) J8 : thème 2 – exercice 6 ; thème 3 - exercice 5 ; thème 4 - exercice 6 (p. 7-9-3) J9 : thème 2 – exercice 7 ; (p.7) ; thème 4 - exercice 7 (facultatif) (p.7-13)

Thème 1 –A : Règles de calculs numérique et littéral (bases collège et seconde)

Rappel de cours :

I. *Calculs avec des fractions : (rappels collège)*

Pour tous réels a, b, c, d (non nuls) : $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$; $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

Vidéo Méthodes : *https://www.youtube.com/watch?v=WBip-WeQtkM*

II. *Avec des puissances : (rappels collège)*

Pour tous réels a et b non-nuls, pour tous entiers naturels n et p :

$a^0=1$ $\quad$ $a^1=a$ $\quad$ $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\quad$ $a^n\times a^p=a^{n+p}$ $\quad$ $\frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$ $\quad$ $(a^n)^p=a^{np}$

$(a\times b)^n=a^n\times b^n$ $\quad$ *(Attention $(a+b)^n\neq a^n+b^n$)* $\quad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

Vidéo Méthodes : *https://www.youtube.com/watch?v=GDHofGGcal0*

III. Développement et factorisation (rappels collège puis lycée)

a) Simple distributivité

Formule : $a(b+c)=ab+ac$

Vidéo Méthodes :

https://www.youtube.com/watch?v=RuWyHq2sABE

b) Double distributivité

Formule : $(a+b)(c+d)=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{bd}$

Vidéo Méthodes :

https://www.youtube.com/watch?v=YS-3JI_z2f0&feature=youtu.be

https://www.youtube.com/watch?v=1EPOmbvoAlU

c) Les identités remarquables :

Formules :

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Vidéo Méthodes : https://www.youtube.com/watch?v=r3AzqvgLcI8&feature=youtu.be (facteur commun)

https://www.youtube.com/watch?v=5dCsR85qd3k (facteur commun)

https://www.youtube.com/watch?v=VWKNW4aLeG8&feature=youtu.be (id remarquable)

https://www.youtube.com/watch?v=91ZSBiadxrA&feature=youtu.be (les deux)

https://www.youtube.com/watch?v=nLRRUMRyfZg (id remarquable)

****

Exercices d'entrainement :

(les 3 premiers exercices sont des rappels de collège, à faire seulement si vous maitrisez mal ces domaines)

Exercice 1 :

Calculer les expressions en détaillant les calculs (donner le résultat sous forme irréductible) :

$A=\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{10}$ $\qquad$ $B=\frac{\frac{2}{5}}{3-\frac{7}{10}}$

Exercice 2 :

Ecrire les nombres suivants sous la forme a^n : $\quad A=\frac{3^{-2}}{3^5\times3^2}$ $\qquad B=2^5\times(2^2)^3$

Exercice 3 : Développer les expressions suivantes

$A=-4x(1-6x)$ $\qquad B=(4x-3)(5-2x)$ $\qquad C=(2x+3)(2x-3)$ $\qquad D=(3x-5)^2$

Exercice 4 : Factoriser les expressions suivantes

$A=28x^2-21x$ $\qquad B=25x^2-81$ $\qquad C=(x-8)^2-9$

Facultatif : $\quad D=2(x-3)-4x(x-3)$ $\qquad E=2x(5x-3)-(5x-3)^2$ (approfondissement)

Thème 1 - B : équations et inéquations, tableaux de signe (rappels de collège et seconde)

Rappels de cours : résoudre une équation ou inéquation signifie déterminer l'ensemble des solutions

I. Résolution d'équations

Règles de transformation d'égalités :

On ne change pas une égalité lorsque :

- on ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres,
- on les multiplie par un même nombre,
- on les divise par un même nombre non nul.

Règle du produit nul :

AB = 0 ⇔ A=0 OU B=0

Vidéo Méthodes :

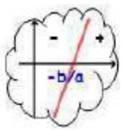
https://www.youtube.com/watch?v=7ZZDMxKNyQA
https://www.youtube.com/watch?v=APj1WPPNUgo

Attention pour les inégalités : on ne change pas le sens d'une inégalité lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres par un même nombre strictement **positif (on change le sens si on multiplie/divise par un négatif)**

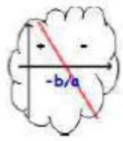
II. Signe d'une fonction affine :

Le tableau de signe de ax+b dépend du signe de a :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
Signe de $ax+b$ ($a>0$)		$-$	0	$+$	



x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
Signe de $ax+b$ ($a<0$)		$+$	0	$-$	



III. Signe d'un produit de fonctions affines:

On utilise pour cela un tableau de signes comme dans l'exemple ci-dessous (on cherche les valeurs qui annulent chacun des facteurs, puis on applique la règle des signes du collège : un produit comportant un nombre impair de facteurs négatifs est négatif)

Exemple : $f(x) = (2x - 4)(3 - 7x)$ s'annule pour $x=3/7$ ou $x=2$

x	$-\infty$		3/7		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-7x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercices

Exercice 5 : Résoudre les équations et inéquations suivantes (bases de collège et seconde)

a) $-3x + 5 = x - 1$ b) $\frac{x+3}{2} = 5$ c) $2(3x - 2) = 6x + 3$ d) $(3x - 2)(5x - 1) = 0$ e) $2x(3x - 1) = 0$

f) $5x - 2 < x + 5$ g) $2x - 5 \leq 5x + 3$

Exercice 6 : Inéquation à l'aide d'un tableau de signes (bases de seconde)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)(3 - x)$.

1. A l'aide de la calculatrice, résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.

2. A l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe de la fonction f.

3. Vérifier le résultat de la question 1.

Exercice 7 :

a) Établir le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x(x + 1)(3 - x)$.

En déduire la solution de l'inéquation $-2x(x + 1)(3 - x) < 0$.

b) On considère la fonction h définie par $h(x) = x^3 - x^2$.

Factoriser h(x) et en déduire son tableau de signes.

Thème 2 – Les fonctions - A : bases vues en troisième et seconde

(en gris : des bases des années collège en cas de besoin)

I. Notion de fonctions :

*Une fonction est un procédé qui permet d'associer à un nombre, un **unique** autre nombre appelé **image**.*
Si on appelle f cette fonction, l'image de x par la fonction f sera notée $f(x)$. On peut noter $f : x \to f(x)$
***L'ensemble de définition** d'une fonction est l'ensemble des nombres réels pour lesquels on peut calculer l'image.*
On peut le noter D_f (pour une fonction f)
***La courbe représentative de f** (on note souvent C_f) est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ en faisant prendre à x toutes les valeurs de l'ensemble de définition.*
*Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si $f(a) = b$, alors on dit que : - b est **l'image de a** par la fonction f.*
*- a est **un antécédent** de b par la fonction f*

Vidéo Méthodes : https://www.youtube.com/watch?v=FjqPwHS7vE8&feature=youtu.be (Calcul d'image)
https://www.youtube.com/watch?v=0NakIDu5dQU&feature=youtu.be (Recherche d'antécédents)
https://www.youtube.com/watch?v=xHJNdrhzY4Q&feature=youtu.be (représenter graphiquement)
https://www.youtube.com/watch?v=qQUt5y8LFKk&feature=youtu.be (Lire graphiquement)

II. Fonctions affines :

Définitions: *Une fonction de la forme $x \to mx + p$ est une fonction affine.*
m est appelé le coefficient directeur et p est l'ordonnées à l'origine.
Cas particulier : *Quand $p = 0$, on a la fonction $x \to mx$ qui est appelé fonction linéaire.*
Quand $m = 0$, on a la fonction $x \to p$ qui est appelé fonction constante.

Vidéo Méthodes : https://www.youtube.com/watch?v=KR8AqLUngeg (Vérifier si un point appartient à une courbe)
https://www.youtube.com/watch?v=E0NTyDRqWfM (Trouver l'expression algébrique d'une fonction affine à partir de la courbe)
https://www.youtube.com/watch?v=tEiuCP_oekY (Représenter une fonction affine)

III. Variation d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

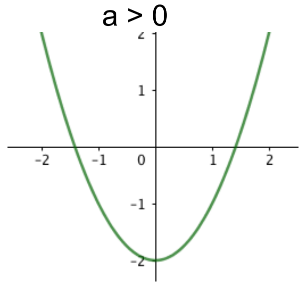
- f est **croissante** sur I signifie que pour tous les réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
- f est **décroissante** sur I signifie que pour tous les réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
- f est **constante** sur I signifie que pour tous les réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.
- Une fonction f est **monotone** sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I .

On résume tout cela dans un tableau de variations (où on peut lire variations, maximas et minimas)

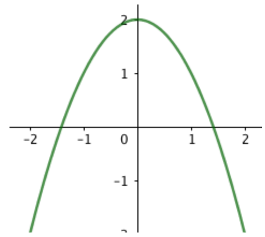
IV. Fonctions du second (et troisième) degré :

La courbe représentative d'une fonction du second degré s'appelle une parabole
Si $f(x) = ax^2 + b$ alors cette parabole a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées, et son sommet a pour coordonnées (0 ; b).
Si a>0, la courbe est « tournée vers le haut » ; si a<0, « tournée vers le bas »

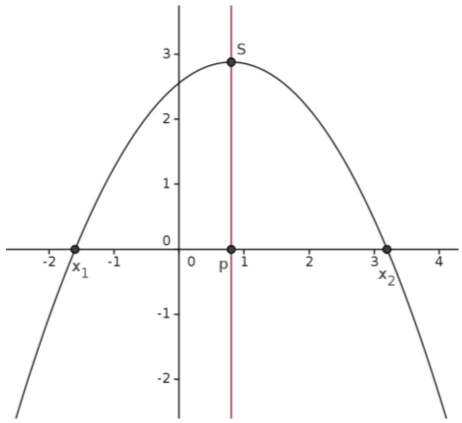
a > 0



a<0



Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.



L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$ et $x = x_2$ appelées les **racines** de la fonction polynôme f.

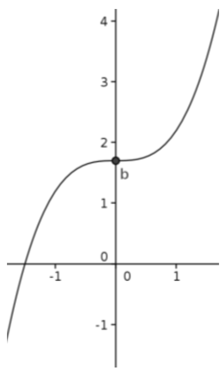
La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$. (Dans le cas où $x_1 = x_2$, il n'y a qu'un seul point d'intersection).

La parabole représentant f a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = p$ avec $p = \frac{x_1+x_2}{2}$. Son sommet a pour coordonnées $(p; f(p))$. Il appartient à l'axe de symétrie.

(la figure à gauche correspond au cas où a<0)

Troisième degré :
Une fonction de la forme f(x) = ax³ + b est croissante sur □ si a>0, et décroissante si a<0

Allure de la courbe pour a>0 :



Thème 2 – Les fonctions - B : Dérivation *(l'essentiel à retenir)*

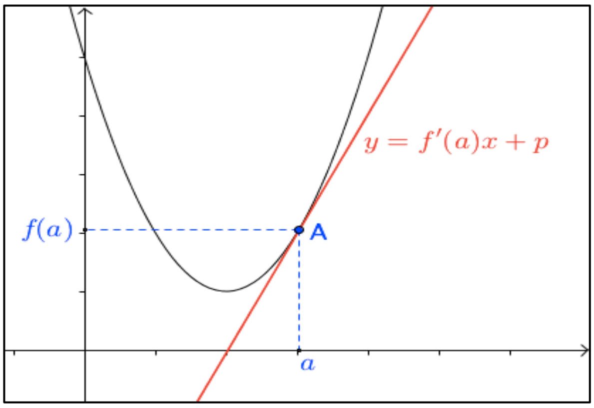
Le taux d'accroissement de f entre a et b est : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Il correspond à la pente de la droite qui passe par les deux poins $A(a; f(a))$ et $B(b;\ f(b))$ (points de la courbe représentative de f, d'abscisses a et b)

Lorsqu'on se place au voisinage du point A d'abscisse a :

Si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une **limite finie (c-à-d un nombre réel)** quand h tend vers 0

alors la fonction f est dérivable en a et le nombre dérivé de f en a, f'(a)= $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Le nombre dérivé de f en a correspond à la pente de la tangente de la courbe représentative de f, au point d'abscisse A.



Dérivées des fonctions usuelles

k est un réel et *n* ∈ℤ

Fonction	Dérivée ☞♡
$f(x)= k$ (constante) $x \in \mathbb{R}$	$f'(x)= 0$ $x \in \mathbb{R}$
$f(x)= x$ $x \in \mathbb{R}$	$f'(x)= 1$ $x \in \mathbb{R}$
$f(x)= x^2$ $x \in \mathbb{R}$	$f'(x)= 2x$ $x \in \mathbb{R}$
$f(x)= x^3$ $x \in \mathbb{R}$	$f'(x)= 3x^2$ $x \in \mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

u et *v* sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et *k* est un réel

Fonction	Dérivée ☞♡
$u+v$ «somme»	$u'+v'$
$k\,u$	ku'

Exemple : La fonction dérivée de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ est :

$f'(x) = 3x^2 - 5 \times 2x + 3 - 0$, c'est-à-dire : $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

Equation de la tangente à Cf au point d'abs. a

$y=f'(a)\,(x-a)+f(a)$ ☞♡

avec ***f'(a) coefficient directeur de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse a***

f(a) image de a par f

Lien entre signe de la dérivée *f'(x)* et variations de la fonction *f* ☞♡

f'(x) ≥0 *pour x*∈*I* ⇔ *f est croissante sur I*

f'(x) ≤0 *pour x*∈*I* ⇔ *f est décroissante sur I*

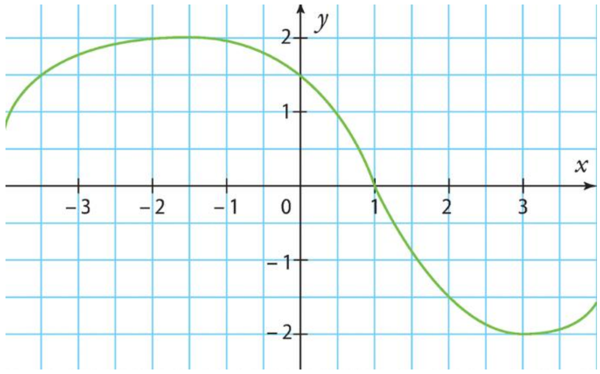
f'(x) =0 *pour x*∈*I* ⇔ *f est constante sur I*

(ce qui permet d'établir le tableau de variations de f à partir du tableau de signes de f')

Exercices

Bases de troisième et de seconde :

Exercice 1 : Soit g la fonction définie sur $[-4; 4]$ dont la courbe est donné ci-contre :



a) Graphiquement rechercher les images éventuelles de -1 ; de 1 et de 3.

b) Graphiquement rechercher les antécédents éventuels de -1, de 1,5 et de 2,5.

c) Résoudre graphiquement $g(x) < 0$; puis $g(x) < 1{,}5$

d) Graphiquement, donner le tableau de signes et le tableau de variations de g.

Exercice 2 : Soit f une fonction définie par $f(x) = 5x + 3$ et g définie par $g(x) = x^2 - 9$

1) Laquelle est une fonction affine ? Identifier les coefficients m et p.

2) Calculer l'image de 2 par la fonction f.

3) Calculer $f(-3)$

4) Le point $A(0{,}2;\ 4)$ appartient-il à la courbe représentative de f ?

5) Quels sont les éventuels antécédents de -7 par la fonction f ?

6) Représenter graphiquement la fonction f.

7) Calculer l'image de -2 par g

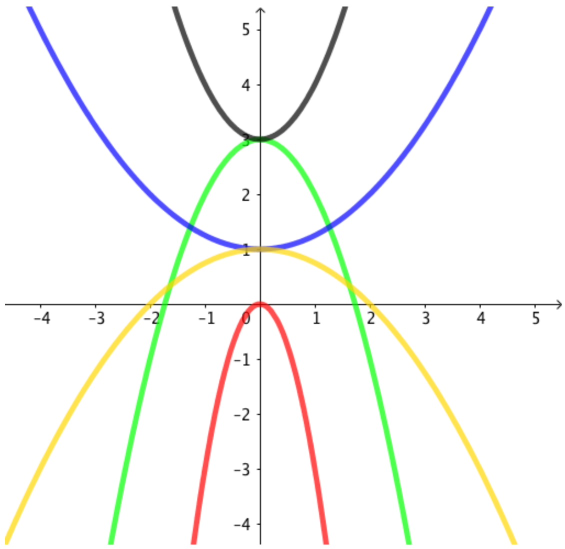
8) Déterminer le ou les antécédents par g des nombres : 0 ; -10 ; 16

Second degré :

Exercice 3

Associer chaque fonction à sa représentation graphique :

$$\mathbf{f(x) = -x^2 + 3}$$
$$\mathbf{g(x) = -3x^2}$$
$$\mathbf{h(x) = x^2 + 3}$$
$$\mathbf{p(x) = \frac{x^2}{4} + 1}$$
$$\mathbf{q(x) = -\frac{x^2}{4} + 1}$$



Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

a) Justifier que $f(x)$ s'écrit aussi $-2(x-1)(x+2)$

b) Préciser ses racines et en déduire son tableau de signes

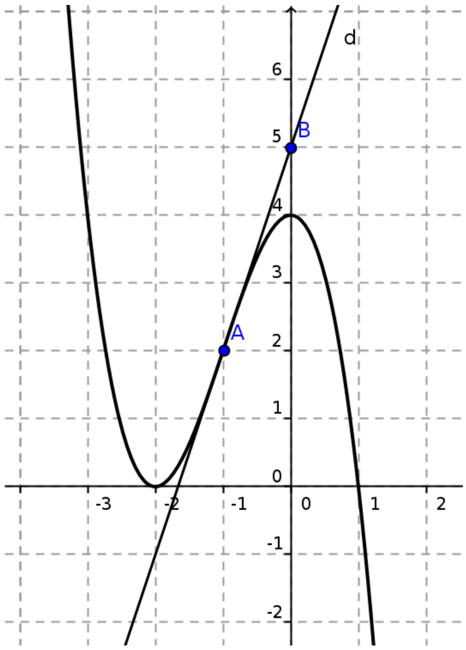
c) Préciser l'axe de symétrie de sa courbe représentative. En déduire les coordonnées du sommet de la courbe représentative.

d) Dessiner l'allure de la courbe dans un repère (en plaçant le sommet et les intersections avec l'axe des abscisses)

e) Dresser son tableau de variations.

Dérivation

Exercice 5



1. On considère une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-contre à droite, avec la droite (AB) tangente à la courbe au point A d'abscisse -1.

a) Lire graphiquement :

f'(0) = ………… f'(-1) = ………...

f(0) = ………… f(-1) = ………...

b) Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 :

……………………………………………………

……………………………………………………

c) Dresser le tableau de variations de f sur [-3 ; 1,2].

d) En déduire le tableau de signes de f'.

Exercice 6 :

a) Calculer la fonction dérivée de la fonction suivante (on admet que f est définie et dérivable sur □) :

$f(x) = 3x^2 + x + 4$

b) Étudier le signe de cette dérivée et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f, au point A d'abscisse -2.

Exercice 7 :

a) Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes (définies et dérivables sur □) :

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ $\qquad$ $h(x) = \frac{x^3}{3} - x + 2$

b) Étudier le signe de ces dérivées (il faut d'abord les factoriser puis faire un tableau de signes)

C) En déduire le tableau de variations de g et h.

Thème 3 – Les suites

Modes de génération d'une suite :

- Suite définie par une formule explicite : $u_n = f(n)$ avec n entier naturel

  Par exemple, pour tout $n \geq 0$ on a $u_n = n^3 - 3n$ Ainsi $u_{10} = 10^3 - 3 \times 10 = 970$

- Suite définie par récurrence : $u_0 = a$ (réel donné) et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$

  Par exemple, $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout $n \geq 0$ Ainsi $u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times (-2) - 2 = -8$ $u_2 = \ldots$ $u_3 = \ldots$ . . .

Sens de variations d'une suite

La suite (u_n) est croissante $\Leftrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est décroissante $\Leftrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

La suite (u_n) est constante $\Leftrightarrow$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

Suite monotone

La suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est -soit croissante
-soit décroissante

La suite (u_n) est n'est pas monotone lorsqu'elle n'est -ni croissante
-ni décroissante

Pour étudier le sens de variations d'une suite (on dit aussi « étudier la monotonie ») : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

S'il est strictement positif pour tout entier naturel n alors $u_{n+1} > u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

S'il est strictement négatif alors la suite (u_n) est décroissante.

Suites arithmétiques et géométriques :

(u_n) est une suite arithmétique **si et seulement si** il existe un réel r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$

$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \ldots\ldots u_p \xrightarrow{+r} u_{p+1} \ldots u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$

Le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique.

(u_n) est une suite géométrique **si et seulement si** il existe un réel q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.

$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \ldots\ldots u_p \xrightarrow{\times q} u_{p+1} \ldots u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$

Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique.

Variations : Une suite arithmétique de raison r est croissante si r>0, décroissante si r<0 ; on parle de variation linéaire

Une suite géométrique de premier terme positif et de raison positive a tous ses termes positifs ; elle est croissante si q>1, décroissante si 0<q<1, constante si q=1 (il s'agit de croissance/décroissance exponentielle)

Au-delà du programme du 1ère STMG : dans le cas d'une suite arithmétique on aura alors $u_n = u_0 + nr$;

dans le cas d'une suite géométrique : $u_n = u_0 \square q^n$.

Exercices

Exercice 1 :

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = 2n^2 - n - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour chaque suite: **a)** $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$ **b)** $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1}$

   -déterminer par le calcul les quatre premiers termes.
   -déterminer à l'aide de la calculatrice, le 13ième terme puis le terme de rang 20.

Exercice 2.

a) Compléter cette suite de nombres : 40 ; 20 ; 10 ; ……. ; ……
S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ? (préciser la raison) ....
Définir par récurrence (en donnant son premier terme et une relation de récurrence permettant de calculer u_{n+1} en fonction de u_n) une suite (u_n) dont ils seraient les premiers termes :

$$\begin{cases} u_0 = \ldots \\ u_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

b) Même question pour la suite suivante : 9 ; 5 ; 1 ; …… ; …... :
S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ? (préciser la raison) ....
La définir par récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = \ldots \\ v_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Exercice 3 :

a) (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 telle que $u_4 = 30$. Calculer u_3 et u_5. u_3 =………… ; u_5 = …………
b) (v_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $v_4 = 8$. Calculer v_3 et v_5. v_3 =………… ; v_5 = …………
c) (w_n) est une suite arithmétique telle que $w_8 = 10$ et $w_9 = 2$. Quelle est sa raison ? ………………..
d) (t_n) est une suite géométrique telle que $t_7 = 20$ et $t_8 = 2$. Quelle est sa raison ? ………………..

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout n□□ par $u_n = -5n + 3$.
1. Calculer les trois premiers termes de cette suite. Semble-t-elle arithmétique ou géométrique ?
2. a) Exprimer u_{n+1} en fonction de n, puis calculer $u_{n+1} - u_n$.
b) En déduire la nature de la suite (u_n). On précisera la raison et le premier terme.
3. Donner le sens de variations de (u_n). Justifier.

Exercice 5

En 2020, la ville X comptait 5000 habitants et la ville Y en comptait 4000. Chaque année, la population de la ville X augmente de 250 habitants, alors que la population de la ville Y augmente de 12 %.
On pose $x_0 = 5000$ et on note x_n le nombre d'habitants de la ville X en l'année 2020+n.
On pose $y_0 = 4000$ et on note y_n le nombre d'habitants de la ville X en l'année 2020+n.
a) Calculer le nombre d'habitants de chaque ville en 2021.
b) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n . Quelle est la nature de la suite (x_n) ? (soyez précis : suite.... de raison....)
c) Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n. Quelle est la nature de la suite (y_n) ? (soyez précis)
d) Calculer à la calculatrice la population de ces villes en 2030. On ne demande pas de détailler les calculs.
e) On considère les deux algorithmes ci-dessous :
Le 1er algorithme affiche comme résultat 8000. Le 2ème affiche 4. Expliquer à quoi correspondent ces nombres dans le contexte de l''exercice.

```
X=5000
n=12
for k in range(n):
    X=X+250
print(X)
```

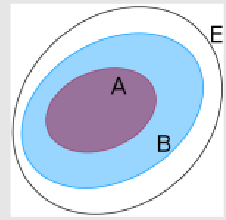
```
X=4000
n=0
while (X<6000):
    X=X*1.12
    n=n+1
print(n)
```

Thème 4 – Pourcentages, proportions et probabilités

1. Pourcentages (et proportions) : rappels de collège et seconde

Calculer a% d'un nombre revient à multiplier ce nombre par $\frac{a}{100}$
La proportion ou fréquence d'une sous-population A d'effectif n_A par rapport à une population E d'effectif n_E est $\frac{n_A}{n_E}$
Le taux d'évolution d'une valeur y_1à une valeur y_2 est T=$\frac{y_2 - y_1}{y_1}$
Augmenter une quantité de $a\%$ revient à multiplier cette quantité par$1 + \frac{a}{100}$
Diminuer une quantité de $a\%$ revient à multiplier cette quantité par $1 - \frac{a}{100}$
Faire évoluer une quantité d'un taux t revient à multiplier cette quantité par 1+t

2. Proportions

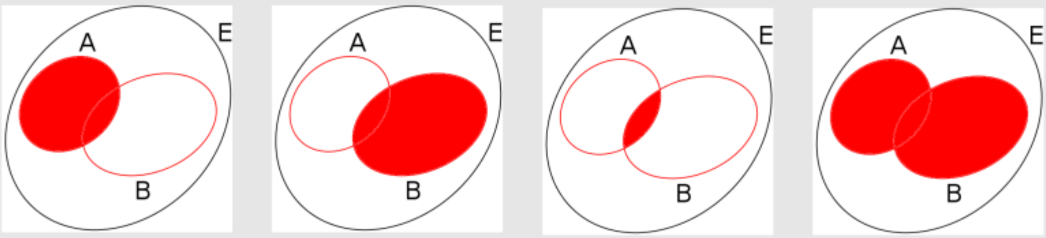


1. Si on considère trois ensembles A, B, E tels que A □ B □ E (figure à droite),

alors la proportion de A dans E s'obtient en multipliant la proportion de A dans B par la proportion de B dans E.

2.

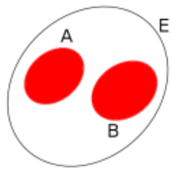
Soit A et B deux sous-populations d'une population E.
L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$ est constituée de tous les éléments communs à A et à B.
La **réunion** de A et B, notée $A \cup B$ est constituée de tous les éléments appartenant à au moins une des parties A et B.



Sous-population A | Sous-population B | **Intersection** : $A \cap B$ | **Réunion** $A \cup B$

Remarque :

Lorsque A et B n'ont aucun élément en commun, on dit qu'ils sont **disjoints**.
On note dans ce cas : $A \cap B = \emptyset$ où $\emptyset$ désigne l'ensemble vide.



A et B **disjointes**

Propriété :

Soient p_A, p_B et $p_{A\cap B}$ les proportions respectives de A, B et $A \cap B$ dans E.
La proportion de $p_{A\cup B}$ de $A \cup B$ est égale à :

$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$$

Applications : **Exercice 1**

1. En France, on considère qu'environ 6% de la population est de groupe sanguin O- (donneur universel). Sachant que la population est de 65,8 millions d'habitants, combien de personnes sont du groupe O- ?
2. Dans une classe de 32 élèves, il y a 18 filles. Quel est la proportion (en %) de filles de cette classe ?
3. Le prix d'un article est passé en un mois de 28€ à 29,54€. Déterminer le taux d'évolution de cet article.
4. Un salaire augmente de 3%. Il est multiplié par ....
5. Le prix d'une matière première a augmenté de 150%. Il a été multiplié par........
6. Un prix a été multiplié par 0,75. Il a subi une .... ;
7. Un produit en vente à 145€ a subit une baisse de 5% puis une augmentation de 2%. Déterminer son nouveau prix.
8. Le prix d'un article toutes taxes comprises (TTC) est le prix hors taxes (HT) augmenté de la TVA.
   Le prix HT d'un article est de 225€. Déterminer son prix TTC avec une TVA de 20%.
   Le prix TTC d'un article est 150€ . Déterminer son prix HT avec une TVA de 20%.
9. Dans une classe, 55% des élèves font du sport ; 15 % jouent d'un instrument de musique ; 5% pratiquent les deux activités. Combien pratiquent au moins une activité ? Combien ne pratiquent aucune activité ?

3. Tableaux croisés d'effectifs, probabilités conditionnelles

Exemple :

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Voici les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

Notations :
A : « Le patient a pris le médicament A. » ; B : « le patient a pris le médicament B »
G : « Le patient est guéri. »

Dans cet exemple : la fréquence des patients ayant pris le médicament A est $f(A) = \frac{card(A)}{total} = \frac{455}{800} = 56.875\%$.

La fréquence des patients ayant pris le médicament A <u>et</u> non guéris est : $f(A \cap \bar{G}) = \frac{card(A \cap \bar{G})}{total} = \frac{72}{800} = 9\%$

La fréquence des patients guéris parmi ceux qui ont pris le médicament A est : $f_A(G) = \frac{card(A \cap G)}{card(A)} = \frac{383}{455} = 84.176.$

On peut aussi utiliser le vocabulaire des probabilités :

La probabilité pour un patient d'être guéri est $P(G) = \frac{674}{800} = f(G)$

La probabilité pour un patient d'avoir pris le médicament A et d'être guéri est $P(A \cap G) = \frac{card(A \cap G)}{total} = \frac{383}{800} =$ 47,875%

La probabilité d'être guéri sachant qu'il a pris le médicament A est : $P_A(G) = \frac{card(A \cap G)}{card(A)} = \frac{383}{455} = 84.176.$

Rq : $P_A(G) = \frac{P((A \cap G)}{P(A)}$

Application : **Exercice 2**

1. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la répartition des salariés d'une entreprise.

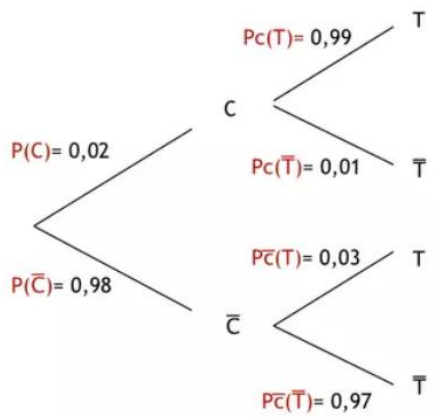
	Ouvriers	Employés	Cadres	Total
Temps partiel	24	26	7	
Temps complet	168	39	21	
Total				

2. Déterminer la fréquence conditionnelle des ouvriers (O), puis celle des cadres (C), par rapport aux salariés à temps partiel (P).
3. Calculer f_O (P) et f_C (P).
(On donnera les fréquences en pourcentage à 0,1 près).
4. On choisit un salarié au hasard. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un cadre ?
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un cadre à temps partiel ?
Quelle est la probabilité, sachant qu'il est cadre, qu'il soit à temps partiel ?

4. Arbre pondéré de probabilité : principes de base :

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1
- Sur un chemin de branches, les probabilités **se multiplient**.
- Les probabilités de « plusieurs chemins» s'additionnent

Exemple ci-contre : C = la personne est contaminée
T = le test est positif



On peut calculer :

- La probabilité d'être non contaminé et testé positif :

$P(\bar{C} \cap T) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(T) = 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0294$

- La probabilité d'être testé positif :

$$P(T) = P(C) \times P_C(T) + P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(T) = 0.02 \times 0{,}99 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0492$$

- On peut en déduire la probabilité d'être non contaminé sachant qu'on est testé positif : $P_T(\bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap T)}{P(T)} = \frac{0.0294}{0.0492} = 59{,}75\%$

5. Loi de probabilité, espérance

Définir une variable aléatoire, cela signifie faire correspondre, à chaque événement élémentaire d'une expérience aléatoire, un nombre réel

Exemple : on lance un dé, si on tire un 6 on gagne 10€, sinon on perd 2€. On définit ainsi une V.A. Qu'on notera G.

Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire, c'est faire correspondre à chaque valeur de la variable aléatoire sa probabilité (on donne souvent la loi de probabilité sous la forme d'un tableau).

Pour l'exemple précédent :

Valeurs g_i	-2	10
$P(G=g_i)$	5/6	1/6

L'espérance d'une variable aléatoire se calcule par la formule $E(X) = p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + p_3\, x_3 + \ldots + p_n x_n$
(où x_1 , x_2 , ... Sont les valeurs prises par la variable aléatoire, et p_1, p_2, ... sont les probabilités de chaque valeur)

Lorsque la variable aléatoire X modélise un gain lors d'un jeu de hasard, E(X) correspond au gain moyen. S'il vaut 0, on dit que le jeu est équitable.

Une épreuve dont les 2 issues sont « succès » et échéc, avec une probabilité de succès notée p, est appelée « épreuve de Bernoulli de paramètre p ». Si on appelle X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, sa loi est appelée « loi de Bernoulli » de paramètre p (Rq : la probabilité d'obtenir 1 vaut p ; la probabilité d'obtenir 0 vaut 1-p). Son espérance vaut p. La répétition d'épreuves aléatoires identiques indépendantes constitue un « schéma de Bernoulli » (qu'on représente par un arbre pondéré)

Applications

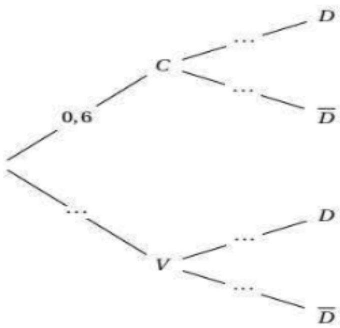
Exercice 3 :

Une entreprise a fabriqué en un mois 1 500 chaudières, dont 900 chaudières à cheminée et 600 chaudières à ventouse.
On a constaté, dans ce lot, que: 1% des chaudières à cheminées ont un défaut

6% des chaudières à ventouses ont un défaut.
On prélève au hasard le numéro de série d'une chaudière de la production de ce mois.
On considère les évènements suivants: C: «Le numéro de série est celui d'une chaudière à cheminée»
V: «Le numéro de série est celui d'une chaudière à ventouse»
D: «Le numéro de série est celui d'une chaudière défectueuse»

1. Recopier et compléter sur la copie le tableau à double entrée suivant:

	Nombre chaudières à cheminée	Nombre chaudières à ventouse	Total
Nombre chaudières défectueuses			
Nombre chaudières non défectueuses			
Total	900	600	1 500



2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
3. Calculer la probabilité que le numéro de série soit celui d'une chaudière défectueuse.
4. Déterminer $P_D(V)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 :

Une sac opaque contient quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard un jeton, on note le numéro, on replace ce jeton dans le sac, on tire un deuxième jeton et on fait la somme X des nombres inscrits sur les jetons tirés.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Si je gagne la valeur de X, combien puis-je espérer gagner ?

3. **a)** Calculer $P(X > 5)$.

b) Calculer $P(X \leq 5)$.

Exercice 5 :

O n considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

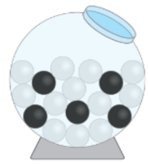
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.

2) Déterminer les probabilités suivantes :

a) On tire deux boules blanches.

b) On tire une boule blanche et une boule rouge.

c) On tire au moins une boule blanche.



Exercice 6

Après la correction d'un contrôle, le professeur compte que 24 élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 10, et 6 ne l'ont pas obtenue.

Le professeur choisit une copie au hasard. Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi de Bernoulli.

Cette expérience aléatoire possède …….issues.

La probabilité de l'issue « la copie indique une note supérieure ou égale à 10 » est égale à p= …………..

Expliquer si on peut modéliser cette situation par une loi de Bernoulli ; Préciser le paramètre.

Exercice 7 (approfondissement - facultatif) :

Une résidence de vacances propose uniquement deux formules:

- la formule «pension complète» dans laquelle 3 repas par jour sont fournis ;
- la formule «demi-pension» dans laquelle sont fournis uniquement le petit déjeuner et le dîner.

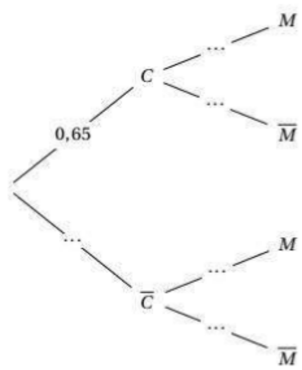
Pour l'année 2018, 65% des clients ont choisi la pension complète; les autres ont choisi la formule «demi-pension».
Parmi les clients qui ont choisi la demi-pension, 30% ont réservé l'option «ménage» en fin de semaine.
De plus, 70% des clients qui ont choisi la pension complète ont réservé l'option ménage.
On choisit un client au hasard parmi ceux de l'année 2018 et l'on considère les évènements suivants:
C: le client a choisi la formule «pension complète»;
M: le client a choisi l'option «ménage ».

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. Calculer $P(C \cap M)$.

3. Montrer que la probabilité que le client ait réservé l'option ménage est 0,56.

4. Calculer la probabilité que le client ait choisi la formule «pension complète» sachant qu'il a réservé l'option ménage.



5. Voici la grille de tarifs de la résidence de vacances pour l'année 2018:

Une semaine de pension complète	800€
Une semaine de demi-pension	650€
Option ménage	50€

On note X la variable aléatoire égale au montant payé par un client de 2018.

a) Calculer $P(X=850)$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Pour un grand nombre de clients, calculer le montant moyen payé par client.